

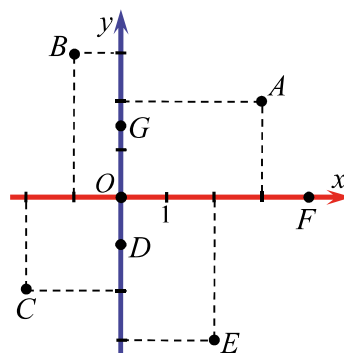
- 1) Considerăm punctele $M(x_M, y_M)$ și $P(x_P, y_P)$. Alegeți câte 4 perechi de valori convenabile pentru coordonatele celor două puncte și reprezentați-le în sisteme de coordonate diferite.
- 2) Pentru fiecare dintre cele 4 cazuri, identificați, folosind un raționament similar celui de la pag. 94, coordonatele mijlocului segmentului MP și comparați-le cu numerele $\frac{x_M + x_P}{2}$, respectiv $\frac{y_M + y_P}{2}$.



Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

- 1 Fie punctul $A(a, b)$. Completați, pe caiet, spațiile libere cu unul dintre cuvintele: *coordoanatele*, *abscisa*, *ordonata*, pentru a obține propoziții adevărate:
 - a) a este ... punctului A ;
 - b este ... punctului A ;
 - a și b sunt ... punctului A .
- 2 Completați, pe caiet, spațiile punctate. Distanța dintre punctele $A(x_1, y_1)$ și $B(x_2, y_2)$ este $\sqrt{\dots\dots\dots}$.
- 3 Reprezentați în același sistem de axe ortogonale punctele $A(1, 3)$, $B(2, 0)$, $C(-2, 4)$, $D(-3, 0)$, $E(-4, 2)$, $F(0, -3)$, $G(-2, -2)$.
- 4 Fie punctele $A(3, 0)$, $B(-5, 0)$, $C(0, -2)$, $D(0, 4)$.
 - Reprezentați într-un sistem de axe ortogonale xOy punctele A , B , C și D .
 - Reprezentați în același sistem de axe ortogonale punctele A' , B' , C' și D' simetricele punctelor A , B , C , respectiv D , față de punctul O .
- 5 Fie punctele $E(2, 3)$, $F(-3, 2)$, $G(3, -1)$.
 - Reprezentați într-un sistem de axe ortogonale xOy punctele E , F , G și simetricele lor față de axa Ox .
 - Notați P , Q , respectiv R , aceste puncte și determinați coordonatele lor.
- 6 Reprezentați într-un sistem de axe ortogonale:
 - punctul $P(4, 3)$ și calculați OP ;
 - punctele $A(-3, 0)$ și $B(2, 0)$ și calculați AB ;
 - punctele $C(0, 6)$ și $D(\sqrt{13}, 0)$ și calculați CD .

- 7 Se consideră un sistem de axe ortogonale xOy .
 - Punctele $A(-3, a)$, $B(1, b - 1)$, $C(4, 2c - 6)$ aparțin axei Ox . Calculați $a + b + c$.
 - Calculați $\frac{1}{q} + \frac{1}{r} + \frac{1}{s}$, știind că punctele $Q(q - \sqrt{2}, -2)$, $R(r - \sqrt{8}, 4, -1)$, $S(s + \sqrt{18}, 1)$ sunt situate pe axa Oy .
- 8 Precizați coordonatele punctelor reprezentate în sistemul de coordonate din desenul de mai jos.



- 9 Într-un sistem de coordonate se consideră punctele $A(3, 2)$, $B(-1, 2)$, $C(-1, -2)$ și D , simetricul punctului A față de axa absciselor.
 - Determinați coordonatele punctului D .
 - Calculați lungimile segmentelor AB , BC , CO și AC .
 - Arătați că $ABCD$ este un pătrat.
- 10
 - Reprezentați într-un sistem de axe ortogonale punctele $M(2, 5)$, $N(0, 1)$.
 - Calculați lungimea segmentului MN .
 - Fie $P(4, y)$. Determinați numărul y , astfel încât triunghiul MNP să fie isoscel, cu baza NP .



3.2

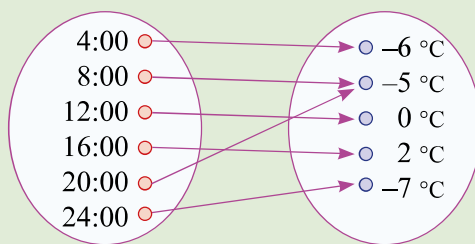
Dependențe funcționale

Rezolvăm și observăm

O fișă de monitorizare a temperaturilor înregistrate la o stație meteo conține următorul tabel:

Ora	4:00	8:00	12:00	16:00	20:00	24:00
Temperatura	-6 °C	-5 °C	0 °C	2 °C	-5 °C	-7 °C

- Citim acest tabel: La ora 4:00, temperatura aerului era de -6°, la ora 8:00, temperatura era de -5° și așa mai departe, adică *temperatura depinde de ora* la care a fost măsurată.
- Stabilim relația de dependență dintre ora la care s-a măsurat temperatura și valoarea acesteia: 4:00 → -6 °C; 8:00 → -5 °C; 12:00 → 0 °C; 16:00 → 2 °C; 20:00 → -5 °C; 24:00 → -7 °C.
- Dacă notăm cu A mulțimea orelor la care s-a măsurat temperatura și cu B mulțimea valorilor înregistrate de termometru, dependența descrisă poate fi evidențiată și prin diagrama alăturată.
- Urmărind săgețile care indică dependența, observăm că fiecărui element din mulțimea A îi corespunde un singur element din mulțimea B .



Descoperim, înțelegem, exemplificăm

Definiție: Fiind date două mulțimi nevide A și B , vom spune că între ele are loc o **dependență funcțională**, dacă, printr-o regulă oarecare, facem ca *fiecărui element* al mulțimii A să-i corespundă *un singur element* al mulțimii B .

Dependențele funcționale se pot reprezenta prin tabele, diagrame circulare, diagrame coloane sau bare, grafice, poligonul frecvențelor.

Problema 1: În tabelul alăturat, este redată dependența funcțională dintre mărimile x și y . Aflați numărul a .

Soluție: $a = 9 - 3 = 6$.

x	0	3	9
$y = x - 3$	-3	0	a

Problema 2: Într-o clasă sunt 25 de elevi. Nu a lipsit niciun elev de la test, așa că se stabilește o dependență funcțională între mulțimea elevilor clasei și mulțimea notelor obținute. Elev 1 → nota 6, Elev 2 → nota 7, Elev 3 → nota 6, ..., Elev 25 → nota 7, unele note fiind luate de mai mulți elevi. Numărul de apariții ale notei 6 se numește **frecvență absolută** a acesteia.

Rezultatele obținute la ultima evaluare sumativă sunt redată în tabelul alăturat, numit **tabel de date**. Acesta redă dependența funcțională dintre nota acordată și frecvența acestei note. Astfel de dependențe sunt foarte utile pentru studiul evoluției elevilor dintr-o clasă.

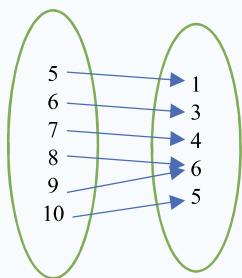
nota	5	6	7	8	9	10
nr. de apariții	1	3	4	6	6	5

Reprezentările prin **diagrame** sau **grafice**, calcularea mediei, dau informații succinte, care pot fi comparate cu cele de la alte teste și care pot indica progresul clasei, în timp.

Graficul unei dependențe funcționale de la mulțimea A la mulțimea B este mulțimea perechilor (x, y) , $x \in A$, $y \in B$, astfel încât lui x îi corespunde y .

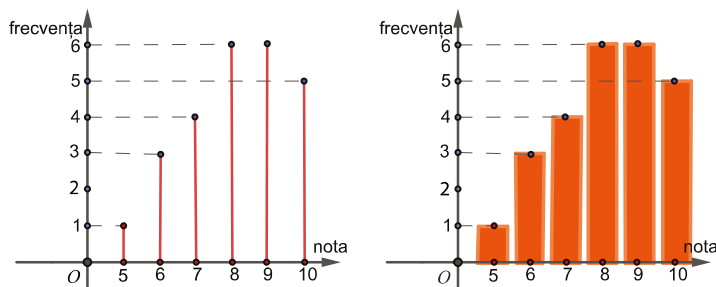
Vom reprezenta datele oferite de tabelul din problema 2 în diferite moduri:

Diagrame Venn-Euler



- Se reprezintă mulțimile între care are loc dependența funcțională.
- Se asociază, prin săgeți, fiecărui element al primei mulțimi elementul corespunzător din a doua mulțime.

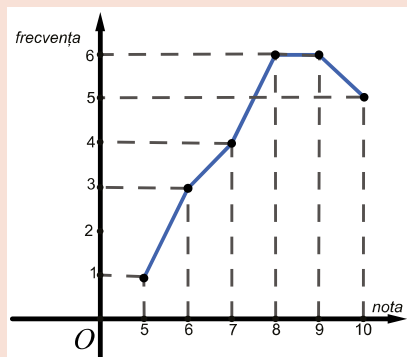
Reprezentare prin coloane sau batoane



- Se reprezintă, într-un sistem de axe de coordonate, punctele corespunzătoare graficului dependenței funcționale.
- Se reprezintă *segmentele verticale* cu un capăt în unul dintre aceste puncte și celălalt pe axa Ox , numite *coloane* sau *batoane*.

În reprezentarea de mai sus, segmentele roșii sunt **coloane** sau **batoane**.

Poligonul frecvențelor



- Se reprezintă, într-un sistem de axe de coordonate, punctele corespunzătoare graficului dependenței funcționale.
- Se reprezintă *linia frântă determinată de segmentele obținute unind, în ordine, punctele desenate*. Această linie se numește **poligonul frecvențelor** (în desen, linia formată din segmentele albastre).

Observație: Poligonul frecvențelor ne ajută să comparăm *frecvențele* a două valori (note) diferite, să observăm care dintre aceste valori (note) are *ponderea* mai mare, să estimăm *media* valorilor (notelor). În cazul acestei probleme, notele de 8 și de 9 au ponderea cea mai mare (dominantă), iar nota 5 are ponderea cea mai mică. Putem estima că media clasei la această evaluare este aproximativ egală cu 8. Folosiți calculatorul și calculați media ponderată.

Știm să aplicăm, identificăm conexiuni

Problema 1: Determinați ultima cifră a numărului $2^n + 3^n$, unde n este număr natural nenul.

Prin calcul, rezultă că ultima cifră a puterilor lui 2 și ale lui 3 se repetă din 4 în 4. Scriem acest lucru printr-o **dependență funcțională** între forma numărului n (de fapt, restul prin împărțire la 4) și ultima cifră a puterilor lui 2, respectiv ale lui 3, reprezentate prin tabele.

Realizăm un nou tabel, în care completăm datele aflate și care ne ajută să identificăm o a treia **dependență funcțională**: între forma numărului n și ultima cifră a numărului $2^n + 3^n$.

Forma numărului	$n = 4k$	$n = 4k + 1$	$n = 4k + 2$	$n = 4k + 3$
$u(2^n)$	6	2	4	8
Forma numărului	$n = 4k$	$n = 4k + 1$	$n = 4k + 2$	$n = 4k + 3$
$u(3^n)$	1	3	9	7
Forma numărului	$u(2^n)$	$u(3^n)$	$u(2^n + 3^n)$	
$n = 4k$	6	1	7	
$n = 4k + 1$	2	3	5	
$n = 4k + 2$	4	9	3	
$n = 4k + 3$	8	7	5	

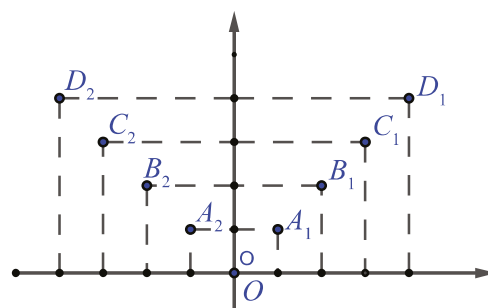
Problema 2: Fie mulțimea $A = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$ și corespondența de la A la mulțimea numerelor naturale: $x \rightarrow y = |x|$.

a) Justificați faptul că între A și \mathbb{N} are loc o dependență funcțională.

b) Reprezentați graficul dependenței.

Soluție: a) Modulul oricărui număr întreg este un număr natural unic, deci corespondența $x \rightarrow y = |x|$ definește o dependență funcțională.

c) Această dependență este reprezentată prin graficul din imaginea alăturată, format din punctele de coordonate $(x, |x|)$, cu $x \in A$.



Punctele $A_1(1, 1)$, $A_2(-1, 1)$, $B_1(2, 2)$, $B_2(-2, 2)$, $C_1(3, 3)$, $C_2(-3, 3)$, $D_1(4, 4)$, $D_2(-4, 4)$ formează graficul dependenței funcționale.

Există numeroase alte tipuri de tabele care ajută la sintetizarea datelor culese pentru studii statistice și tipuri de diagrame prin care se reprezintă dependențele studiate. Pe unele dintre ele le vom cunoaște prin aplicații.

Reținem!

Corespondența $x \rightarrow y$ de la mulțimea nevidă A la mulțimea nevidă B este o **dependență funcțională** dacă aceasta face ca *fiecărui element* al mulțimii A să-i corespundă *un singur element* din mulțimea B .

Dependențele funcționale se pot reprezenta prin: **tabele, grafice, diagrame.**



Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

1

Un kilogram de struguri costă 7,5 lei. Aflați cât plătim pentru 2 kg, 3 kg, 4 kg, 5 kg, 8 kg, respectiv 10 kg de struguri. Scrieți aceste date în tabelul de mai jos:

Cantitatea de struguri (kg)	1	2	3	4	5	8	10
Suma plătită (lei)	7,5						

2

Calculați aria unui pătrat cu latura l , exprimată în centimetri, unde $l \in \{2; 3,5; 6; 10,4; \sqrt{201}\}$. Scrieți datele obținute într-un tabel.

3

Reprezentați, prin diagrame, dependența funcțională dintre raza unui cerc și lungimea cercului, pentru valorile r ale razei, exprimate în centimetri, unde $r \in \{1; 2,5; 0,75; 4,4\}$.

4

Un ciclist se deplasează cu viteza medie de 18 km/h. Scrieți distanțele parcurse de ciclist în 2 ore, 3 ore, 4,5 ore, 300 min și completați datele pe caiete, într-un tabel, după modelul dat:

Timpu	2 h			
Distanța parcursă	36 km			

5

Perimetrul unui dreptunghi este egal cu 24 cm.

a) Exprimați lungimea dreptunghiului în funcție de lățimea acestuia.

b) Calculați lungimea dreptunghiului, știind că lățimea ia, pe rând, valorile: 2 cm, 3 cm, 4,5 cm, 5 cm. Scrieți datele obținute într-un tabel. Reprezentați dependența $l \rightarrow L$ folosind graficul.

6

Elevii unei clase au obținut la un test următoarele note: 9, 8, 4, 7, 8, 9, 7, 8, 10, 10, 5, 8, 9, 6, 9, 8, 10, 7, 7, 6, 4, 8, 9, 8, 9.

Nota	4	5	6	7	8	9	10
Număr elevi							

a) Completați pe caiet, asociind fiecărei note frecvența ei în datele prezentate.

b) Calculați media clasei.

c) Reprezentați grafic dependența dintre notele obținute și frecvența acestora.

d) Reprezentați prin diagrame dependența dintre notele obținute și frecvența acestora.

e) Precizați nota cu ponderea cea mai mare.

