Urmăriți cu atenție partea teoretică (noțiunile hașurate+desenele) apoi studiați problema rezolvată (figura 15), după care rezolvați exercițiile încercuite (tabelul3 și 4)

Aplicaţii: calculul elementelor (latură, apotemă, arie, perimetru) în triunghiul echilateral, în pătrat și în hexagonul regulat

Amintește-ți!

1. Un poligon regulat este un poligon cu toate laturile și toate unghiurile congruente. Pentru a le construi ne folosim de un cerc.

a) Dă exemplu de poligoane regulate.

b) La construcția unui triunghi echilateral, cercul trebuie împărțit în trei arce egale. Care este măsura unui arc?

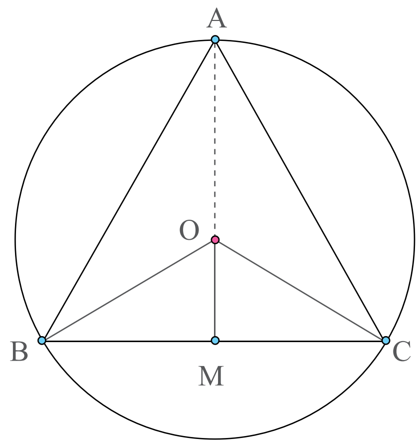
c) Care este măsura unui arc în cazul unui pătrat? Dar al unui hexagon regulat?

Important

• Numim **apotemă a poligonului regulat** distanța de la centrul cercului la o latură a poligonului.

• Lungimea laturii, lungimea apotemei și aria unui poligon regulat se pot exprima cu ajutorul razei cercului circumscris acestuia.

• Dacă notăm l_3, a_3, S_3 lungimea laturii, lungimea apotemei, respectiv aria unui triunghi echilateral și R raza cercului circumscris, atunci $l_3 = R\sqrt{3}$, $a_3 = \dfrac{R}{2}$ și $S_3 = \dfrac{3R^2\sqrt{3}}{4}$.



Justificare: Dacă $OM \perp BC$, atunci $BM = CM = \dfrac{BC}{2}$ (OM este un diametru perpendicular pe coardă).

În $\triangle BOC$ isoscel ($OB = OC = R$), avem $\sphericalangle BOC = 120°$ (arcul BC are $120°$) și atunci $\sphericalangle OCM = 30°$.

În $\triangle MOC$ ($\sphericalangle OMC = 90°$), avem $\sphericalangle OCM = 30°$, de unde rezultă $OM = \dfrac{OC}{2}$, adică $a_3 = \dfrac{R}{2}$.

În același triunghi, din teorema lui Pitagora, avem $MC^2 = OC^2 - OM^2$, adică $MC^2 = R^2 - \dfrac{R^2}{4} = \dfrac{3R^2}{4}$, de unde $MC = \dfrac{R\sqrt{3}}{2}$. Din $CM = \dfrac{BC}{2}$, rezultă $BC = 2CM = 2 \cdot \dfrac{R\sqrt{3}}{2} = R\sqrt{3}$, adică $l_3 = R\sqrt{3}$.

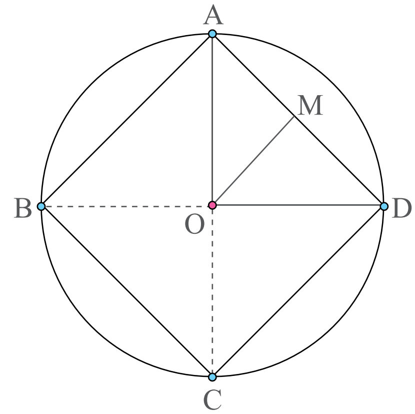
În $\triangle ABC$, AM este înălțime și $AM = R + \dfrac{R}{2} = \dfrac{3R}{2}$.

Atunci $S_3 = \dfrac{BC \cdot OM}{2} = \dfrac{R\sqrt{3} \cdot \dfrac{3R}{2}}{2} = \dfrac{3R^2\sqrt{3}}{4}$.

• Dacă notăm l_4, a_4, S_4 lungimea laturii, lungimea apotemei, respectiv aria unui pătrat și R raza cercului circumscris, atunci $l_4 = R\sqrt{2}$, $a_4 = \dfrac{R\sqrt{2}}{2}$ și $S_3 = 2R^2$.

Justificare: $\triangle AOD$ este dreptunghic în O (AC și BD sunt diagonalele pătratului). Din teorema lui Pitagora în $\triangle AOD$ avem $AD^2 = OA^2 + OD^2$, adică $AD^2 = R^2 + R^2 = 2R^2$, de unde $AD = \sqrt{2R^2} = R\sqrt{2}$. Așadar, $l_4 = R\sqrt{2}$. Acum $OM \perp AD$ în $\triangle AOD$ care este dreptunghic și isoscel ($OA = OD = R$) implică OM este mediană și atunci $OM = \dfrac{AD}{2}$ (media corespunzătoare ipotenuzei este jumătate din ipotenuză).

Deci $a_4 = \dfrac{R\sqrt{2}}{2}$. $S_4 = l_4^2 = \left(R\sqrt{2}\right)^2 = 2R^2$.



• Dacă notăm l_6, a_6, S_6 lungimea laturii, lungimea apotemei, respectiv aria unui hexagon regulat și R raza cercului circumscris, atunci $l_6 = R$, $a_6 = \dfrac{R\sqrt{3}}{2}$ și $S_6 = \dfrac{3R^2\sqrt{3}}{2}$.

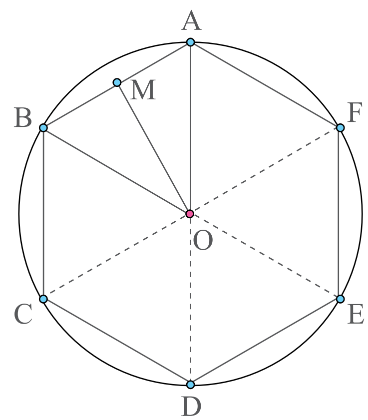
Justificare: Unind centrul cercului cu cele șase vârfuri ale hexagonului regulat, obținem șase triunghiuri echilaterale.

(În $\triangle AOB$ avem, $OA = OB = R$ și $\sphericalangle AOB = 60°$. Un triunghi isoscel cu un unghi de $60°$ este echilateral.)

$\triangle AOB$ este echilateral, atunci $AB = OA = R$, adică $l_6 = R$.

Dacă $OM \perp AB$, atunci $AM = BM = \dfrac{AB}{2}$ (OM este un diametru perpendicular pe coardă) și $\triangle AOM$ este dreptunghic în M. Din teorema lui Pitagora în $\triangle AOM$ avem,

$OM^2 = AO^2 - AM^2$, adică $OM^2 = R^2 - \dfrac{R^2}{4} = \dfrac{3R^2}{4}$, de unde



$$OM = \sqrt{\frac{3R^2}{4}} = \frac{R\sqrt{3}}{2}.\ \text{Deci, } a_6 = \frac{R\sqrt{3}}{2}.\ \text{Acum } S_6 = 6 \cdot A_{\triangle AOB} = 6 \cdot \frac{R \cdot \frac{R\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{3R^2\sqrt{3}}{2}.$$

Exersează!

2 Copiază pe caiet și completează *Tabelul 3*, unde R reprezintă raza cercului circumscris unui triunghi echilateral, iar l_3, a_3, S_3 sunt lungimea laturii, lungimea apotemei, respectiv aria acelui triunghi.

	a)	b)	c)	d)
R	8			
l_3		$6\sqrt{3}$		
a_3			5	
S_3				$4\sqrt{3}$

Tabelul 3

3 Copiază pe caiet și completează *Tabelul 4*, unde R reprezintă raza cercului circumscris unui pătrat, iar l_4, a_4, S_4 sunt lungimea laturii, lungimea apotemei, respectiv aria acelui pătrat.

	a)	b)	c)	d)
R	8			
l_4		$6\sqrt{2}$		
a_4			5	
S_4				16

Tabelul 4

4. Copiază pe caiet și completează *Tabelul 5*, unde R reprezintă raza cercului circumscris unui hexagon, iar l_6, a_6, S_6 sunt lungimea laturii, lungimea apotemei, respectiv aria acelui hexagon.

	a)	b)	c)	d)
R	8			
l_4		6		
a_4			$5\sqrt{3}$	
S_4				$\sqrt{3}$

Tabelul 5

5. Problemă rezolvată: În *Figura 15*, $ABCD$ este un trapez isoscel, în care baza mare $AB = 5\sqrt{3}$ cm, baza mică $CD = 3\sqrt{3}$ cm și $\sphericalangle B = 60^\circ$. Determină raza cercului circumscris acestui trapez.

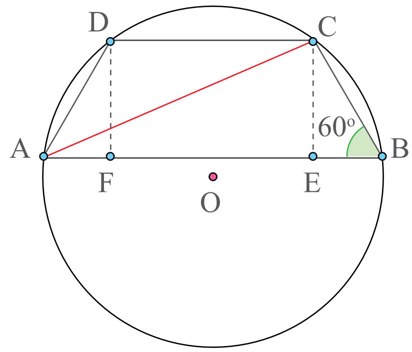


Figura 15

Rezolvare:

Cum gândesc	**Cum scriu**
Dacă unghiul B are 60° înseamnă că arcul ADC are 120° (unghiul B este unghi înscris în cerc), prin urmare coarda AC poate fi privită ca latură a triunghiului echilateral înscris în acest cerc (un cerc se împarte în trei arce cu măsura de 120°).	$\left.\begin{array}{l}\sphericalangle B = 60^\circ \\ \sphericalangle B - \text{ unghi înscris}\end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\frown}{ADC} = 120^\circ \Rightarrow$ $AC = l_3$
Dacă voi construi CE și DF perpendiculare pe AB, voi putea determina lungimile următoarelor segmente: BE, EC, AE și apoi, cu teorema lui Pitagora în triunghiul ACE, voi putea determina lungimea lui AC.	Construim $CE \perp AB$, $E \in AB$ și $CF \perp AB$, $F \in AB$. Avem, $EF = CD = 3\sqrt{3}$ cm ($CDFE$ este dreptunghi) și $EB = AF = \dfrac{AB - EF}{2} = \sqrt{3}$. În $\triangle EBC(\sphericalangle E = 90^\circ)$,tg $60^\circ = \dfrac{EC}{EB} \Rightarrow$ $\sqrt{3} = \dfrac{EC}{\sqrt{3}} \Rightarrow \boxed{EC = 3 \text{ cm}}$ $AE = AB - EB \Rightarrow \boxed{AE = 4\sqrt{3} \text{ cm}}$ În $\triangle ACE(\sphericalangle E = 90^\circ)$, din teorema lui Pitagora rezultă $AC^2 = AE^2 + CE^2 \Rightarrow$ $AC^2 = 48 + 9 = 57 \Rightarrow \boxed{AC = \sqrt{57} \text{ cm}}$
Latura triunghiului echilateral și raza cercului circumscris sunt „legate” prin relația $l_3 = R\sqrt{3}$. De aici voi determina raza cercului circumscris trapezului.	Din $l_3 = R\sqrt{3} \Rightarrow \sqrt{57} = R\sqrt{3} \Rightarrow$ $R = \dfrac{\sqrt{57}}{\sqrt{3}} = \sqrt{19}$. În concluzie, $R = \sqrt{19}$ cm.