EXERCIȚII DE DIVIZIBILITATE

(fișă de lucru)

1. Să se arate că:

   a) $12^{98}+12^{99} \vdots 13$
   b) $3^{78}-3^{75} \vdots 26$
   c) $3^{11}+3^{13}+3^{15} \vdots 91$
   d) $7^{87}-7^{85}+7^{86} \vdots 11$
   e) $5\cdot 3^{102}+8\cdot 3^{100} \vdots 53$
   f) $7\cdot 2^{213}-5\cdot 2^{211}+3\cdot 2^{212} \vdots 29$
   g) $2\cdot 7^{39}+3\cdot 7^{40}-5\cdot 7^{38} \vdots 13$
   h) $2^{11}+2^{12}+2^{13}+2^{14} \vdots 3$
   i) $13^{23}+13^{24}+13^{25}+13^{26} \vdots 7$
   j) $2^{24}+2^{25}+2^{26}+2^{27}+2^{28}+2^{29} \vdots 7$
   k) $3^{17}+3^{18}+4 \vdots 4$
   l) $7^{8}+7^{17}+8 \vdots 8$

   Exemplu: $7^{83}-2\cdot 7^{81} \vdots 47$. Rezolvarea acestor exerciții se bazează pe definiția divizorului și factorul comun. Ca să demonstrăm că numărul e divizibil cu 2, trebuie să arătăm că numărul se poate scrie ca $2\cdot n$

   $7^{83}-2\cdot 7^{81}=7^{81}\left(7^{2}-2\cdot 1\right)=7^{81}\cdot(19-2)=7^{81}\cdot 47 \vdots 47$

2. Să se arate că:

   a) $2^{n+3}-2^{n+1}-2^{n} \vdots 5$
   b) $7^{n+3}+7^{n+2}-7^{n+1} \vdots 11$
   c) $5^{n+2}+5^{n+1}-5^{n} \vdots 29$
   d) $2^{n+3}+2^{n+2}+2^{n} \vdots 13$
   e) $3^{n+3}+3^{n+1}-7\cdot 3^{n} \vdots 23$
   f) $2^{n+1}\cdot 3^{n}+2^{n}\cdot 3^{n+1}\cdot 5 \vdots 17$
   g) $2^{n+2}\cdot 3^{n}+6^{n} \vdots 5$
   h) $2^{n+1}\cdot 3^{n+2}+2^{n}\cdot 3^{n+1}+2^{n+2}\cdot 3^{n} \vdots 25$
   i) $2^{n+2}\cdot 5^{n+1}+2^{n+1}\cdot 5^{n}+2^{n}\cdot 5^{n+2} \vdots 47$
   j) $3^{n+1}\cdot 7^{n+1}+3^{n+2}\cdot 7^{n}+3^{n}\cdot 7^{n+2} \vdots 79$
   k) $3^{n+1}\cdot 2^{n}+3^{n+2}\cdot 2^{n+1}-16\cdot 6^{n} \vdots 5$
   l) $12^{n+2}\cdot 24+3^{n+2}\cdot 4^{n+1}+2^{n+3}\cdot 6^{n} \vdots 17$
   m) $2^{n+2}\cdot 5^{n+1}+2^{n+1}\cdot 5^{n}+2^{n}\cdot 5^{n+2} \vdots 47$
   n) $3\cdot 2^{n}+2^{n+1}+5\cdot 2^{n+1}+2^{n+3} \vdots 23$
   o) $12^{n+1}+3^{n}\cdot 4^{n+1}+3^{n+2}\cdot 2^{2n} \vdots 5$
   p) $3^{2n+5}\cdot 7^{n}-63^{n+1}-3^{2n+1}\cdot 7^{n+2} \vdots 11$
   q) $5^{2n}+25^{n+1}+5^{2n+3}+25^{n+2} \vdots 13$
   r) $3\cdot 2^{n+1}\cdot 7^{n}+14\cdot 2^{n-1}\cdot 7^{n}+42\cdot 2^{n+2}\cdot 7^{n+1}+2^{n+6}\cdot 7^{n}-14^{n} \vdots 313$

   Exemplu: $11\cdot 5^{n}+4\cdot 5^{n+1}+5^{n+2} \vdots 7$. În rezolvarea acestor exerciții se folosește metoda de mai sus dar în plus utilizăm mult formula $a^{n}\cdot a^{m}=a^{n+m}$ aplicată în sens invers.

   $11\cdot 5^{n}+4\cdot 5^{n+1}+5^{n+2}=11\cdot 5^{n}+4\cdot 5^{n}\cdot 5^{1}+5^{n}\cdot 5^{2}=5^{n}\cdot(11+4\cdot 5+25)=5^{n}\cdot 56=5^{n}\cdot 8\cdot 7 \vdots 7$

3. Să se demonstreze că:

   a) $5+5^{2}+5^{3}+.......+5^{204} \vdots 31$
   b) $3+3^{2}+3^{3}+.......+3^{100} \vdots 4$
   c) $3+3^{2}+3^{3}+.......+3^{102} \vdots 13$
   d) $3+3^{2}+3^{3}+.......+3^{100} \vdots 40$
   e) $1+3+3^{2}+3^{3}+.......+3^{2021} \vdots 4$
   f) $1+3+3^{2}+3^{3}+.......+3^{2021} \vdots 13$
   g) $1+5+5^{2}+5^{3}+.......+5^{99} \vdots 26$
   h) $3+3^{2}+3^{3}+.......+3^{2000} \vdots 120$
   i) $6+6^{2}+6^{3}+.......+6^{180} \vdots 43$
   j) $8+8^{2}+8^{3}+.......+8^{42} \vdots 73$

Rezolvarea acestor tipuri de exerciții se bazează pe găsirea unor grupe de termeni care adunate să dea numărul divizorului cerut.

Exemplu: $2+2^2+2^3+.......+2^{201} \,\vdots\, 7$.

Observăm că putem obține 7 din gruparea $2+2^2+2^3=2(1+2+2^2)=2\cdot 7$. Deci dacă grupăm câte trei termeni și dăm factor comun vom obține de fiecare dată paranteza care are ca rezultat numărul 7. Trebuie să mai verificăm dacă numărul de termeni ai sumei este multiplu de 3 ca să putem grupa toți termenii câte trei. Sunt 201 termeni , multiplu de 3 deci îi putem grupa câte trei. Astfel avem:

$$2+2^2+2^3+2^4+2^5+2^6+.......+2^{199}+2^{200}+2^{201}=2(1+2+2^2)+2^4(1+2+2^2)+....+2^{199}(1+2+2^2)=$$
$$=2\cdot 7+2^4\cdot 7+.....+2^{199}\cdot 7=$$
$$=7(2+2^4+......+2^{199}) \,\vdots\, 7$$

4. Demonstrați că:

a) $\overline{ab}+\overline{ba} \,\vdots\, 11$

b) $\overline{abc}+\overline{bca}+\overline{cab} \,\vdots\, 111$

c) $\overline{abcd}+\overline{cdab} \,\vdots\, 101$

d) $\overline{ab}+\overline{ba}+\overline{bc}+\overline{cb} \,\vdots\, 11$

e) $2\cdot\overline{aa}+3\cdot\overline{bb}+4\cdot\overline{cc} \,\vdots\, 11$

f) $\overline{aa}+\overline{bb}+3a+3b \,\vdots\, (a+b)$

g) $\overline{ab4}+\overline{aba}+\overline{a1b} \,\vdots\, 7$

h) $\overline{abc}+\overline{bca}+\overline{cab}+a+b+c \,\vdots\, 7$

Exercițiile de această formă se bazează pe descompunerea în baza 10.

Exemplu: $\overline{ab}+\overline{ba}+a+b \,\vdots\, 3$

$$\overline{ab}+\overline{ba}+a+b=10a+b+10b+a+a+b=12a+12b=12(a+b)=3\cdot 4\cdot(a+b)\,\vdots\,3$$

5. Să se arate că:

a) $126^n-81^n \,\vdots\, 5$

b) $2^{33}+3^{42}-2 \,\vdots\, 5$

c) $9^{12}-7^{12} \,\vdots\, 10$

d) $2^n\cdot 5^{n+1}+1 \,\vdots\, 3$

e) $23^{32}+62^{26} \,\vdots\, 5$

f) $87^{78}+63^{36} \,\vdots\, 10$

g) $10^n+125 \,\vdots\, 9$

h) $7\cdot 6^n+7\cdot 5^n+1 \,\vdots\, 2$

Exercițiile de acest gen se bazează în rezolvare pe ultima cifră și criteriile de divizibilitate.

Exemplul 1: $76^n-31^n+5 \,\vdots\, 10$

$$\left.\begin{array}{l} u(76^n)=u(6^n)=6 \\ u(31^n)=u(1^n)=1 \end{array}\right\} \Rightarrow u(76^n-31^n+5)=u(u(76^n)-u(31^n)+5)=u(6-1+5)=u(10)=0$$

. Cum ultima cifră a adunării este 5 , dacă adunăm un 5 vom obține la final 0. Deci e divizibil cu 10

Exemplul 2: $10^n+98 \,\vdots\, 9$

$$\left.\begin{array}{l} 10^n+98=1\underbrace{0000000....00}_{n\ zerouri}+98 \\ 1+9+8=18 \,\vdots\, 9 \end{array}\right\} \Rightarrow 10^n+98 \,\vdots\, 9$$