Patrulaterul

Patrulaterul convex. Suma măsurilor unghiurilor unui patrulater convex

Observă și descoperă!

1. Sara citește următorul enunț: *Desenează patru puncte, oricare trei dintre ele necoliniare și apoi construiește segmentele determinate de acestea.* Deoarece nu își amintește niște noțiuni, apelează la Victor.

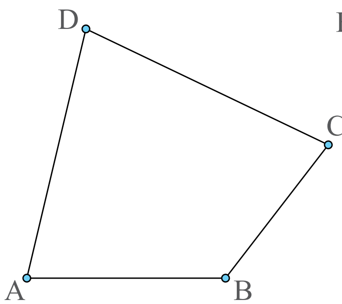
Sara: Victor, tu îți amintești ce înseamnă trei puncte necoliniare?
Victor: Desigur, sunt trei puncte care nu sunt situate pe aceeași dreaptă.
Ana: Ai dreptate, mulțumesc! Acum mă voi descurca!

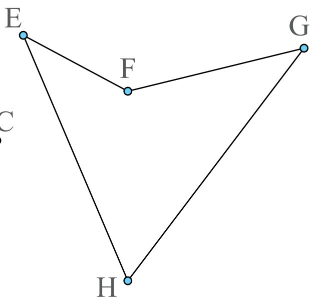
a) Realizează desenul pe care trebuie să îl facă Sara.
b) Câte segmente ai obținut?

Important

• Numim **patrulater** linia frântă închisă formată din patru segmente.

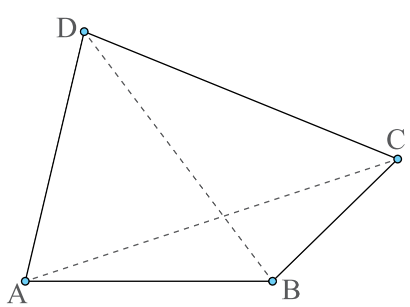
• Un patrulater se notează scriind una după alta literele care denumesc cele patru puncte.





Exemple: patrulaterele $ABCD$ și $EHGF$.

• **Elementele unui patrulater** sunt:
► **Vârfurile**, adică cele patru puncte (A, B, C și D sunt vârfurile patrulaterului);
► **Laturile**, adică segmentele care unesc două vârfuri consecutive (laturile sunt AB, BC, CD și DA);
► **Diagonalele**, adică segmentele care unesc două vârfuri neconsecutive (diagonalele sunt AC și BD);
► **Unghiurile** formate de laturile care au un capăt comun (unghiurile patrulaterului sunt: $\sphericalangle ABC$, $\sphericalangle BCD$, $\sphericalangle CDA$ și $\sphericalangle DAB$).

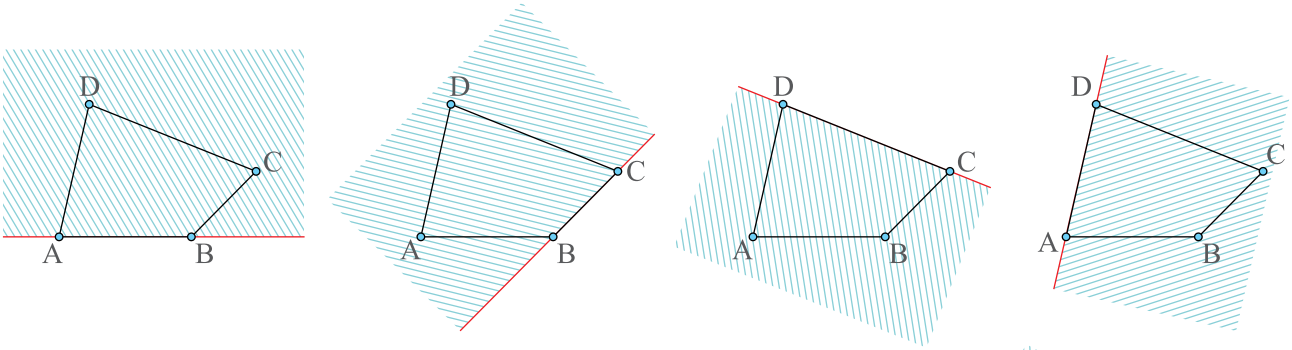


• **Expresii întâlnite la un patrulater:**
► **Laturi opuse:** de exemplu laturile AB și CD.
► **Laturi alăturate:** de exemplu laturile AB și AD.
► **Unghiuri opuse:** de exemplu unghiurile $\sphericalangle ABC$ și $\sphericalangle ADC$.
► **Unghiuri alăturate:** de exemplu unghiurile $\sphericalangle ABC$ și $\sphericalangle BCD$.

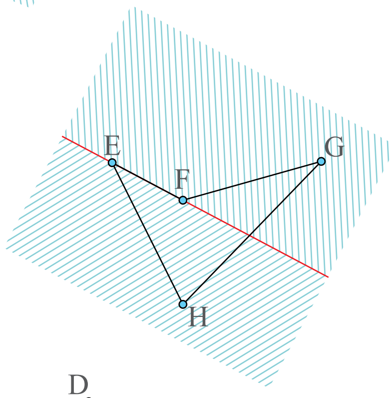
• Numim **patrulater convex** un patrulater în care dreapta determinată de oricare două vârfuri alăturate nu separă celelalte două vârfuri.

• Numim **patrulater concav** un patrulater care nu este patrulater convex.

Exemplu: Patrulaterul $ABCD$ este un patrulater convex.



Exemplu: Patrulaterul $EHGF$ nu este convex. Vârfurile G și H sunt separate de dreapta determinată de vârfurile E și F, fiind situate în semiplane opuse. Patrulaterul $EHGF$ este patrulater concav.



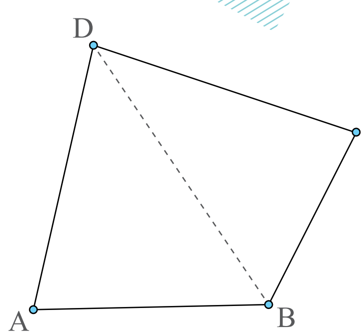
• Într-un patrulater convex **suma măsurilor unghiurilor** este egală cu 360°.

Justificare: Cu ajutorul diagonalei BD obținem triunghiurile ABD și BCD. Suma măsurilor unghiurilor unui triunghi este de 180°. Putem scrie: $\sphericalangle DAB + \sphericalangle ABD + \sphericalangle BDA = 180°$ și $\sphericalangle DCB + \sphericalangle CBD + \sphericalangle BDC = 180°$.

Adunând cele două relații, obținem:

$\sphericalangle DAB + \sphericalangle ABD + \sphericalangle BDA + \sphericalangle DCB + \sphericalangle CBD + \sphericalangle BDC = 360°$.

Dar $\sphericalangle ABD + \sphericalangle CBD = \sphericalangle ABC$ și $\sphericalangle ADB + \sphericalangle CDB = \sphericalangle ADC$ și atunci $\sphericalangle DAB + \sphericalangle ABC + \sphericalangle BCD + \sphericalangle CDA = 360°$.



Exersează!

2. a) Care dintre patrulaterele din *Figurile 1-4* sunt convexe și care sunt concave?

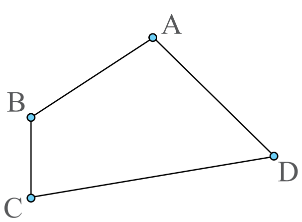


Figura 1

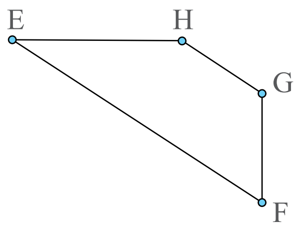


Figura 2

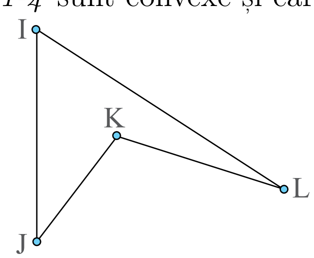


Figura 3

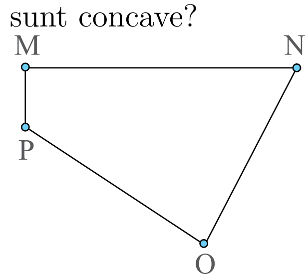


Figura 4

b) Scrie laturile, vârfurile, diagonalele și unghiurile fiecărui patrulater convex.

c) Dă exemplu de două perechi de laturi alăturate și scrie perechile de laturi opuse pentru fiecare patrulater convex.

3. Calculează măsura celui de-al patrulea unghi al patrulaterului convex $ABCD$ în fiecare din cazurile:

a) $\sphericalangle A = 100°$, $\sphericalangle B = 70°$, $\sphericalangle C = 150°$; b) $\sphericalangle B = 80°$, $\sphericalangle C = 63°$, $\sphericalangle D = 114°$;

c) $\sphericalangle A = 52°$, $\sphericalangle B = 63°$, $\sphericalangle D = 88°$; d) $\sphericalangle A = 57°$, $\sphericalangle C = 39°$, $\sphericalangle D = 72°$.

4. Calculează măsurile unghiurilor unui patrulater convex, știind că acestea sunt direct proporționale cu numerele:

a) 3, 6, 7 și 2; b) 9, 4, 10 și 13; c) 9, 3, 6 și 2; d) 3, 6, 2 și 4.

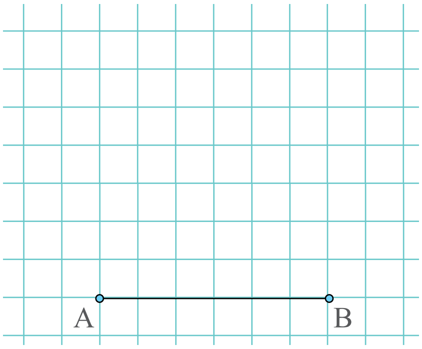
Indicație: a) $\{\sphericalangle A, \sphericalangle B, \sphericalangle C, \sphericalangle D\}$ *d.p.* $\{3,6,7,2\} \Rightarrow \frac{\sphericalangle A}{3} = \frac{\sphericalangle B}{6} = \frac{\sphericalangle C}{7} = \frac{\sphericalangle D}{2} \overset{\text{notăm}}{=} k.$

5. Desenează următoarele patrulatere, cunoscând doar trei dintre măsurile unghiurilor patrulaterului, latura $AB = 3\ cm$ și faptul că acestea sunt convexe. Determină, în fiecare dintre aceste cazuri, care este măsura celui de-al patrulea unghi.

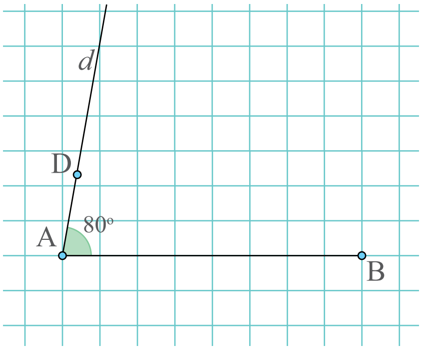
a) $\sphericalangle A = 60°$, $\sphericalangle B = 120°$, $\sphericalangle C = 60°$; b) $\sphericalangle A = \sphericalangle B = \sphericalangle C = 90°$;

c) $\sphericalangle A = 45°$, $\sphericalangle B = 60°$, $\sphericalangle C = 120°$; d) $\sphericalangle A = 75°$, $\sphericalangle B = 80°$, $\sphericalangle D = 85°$.

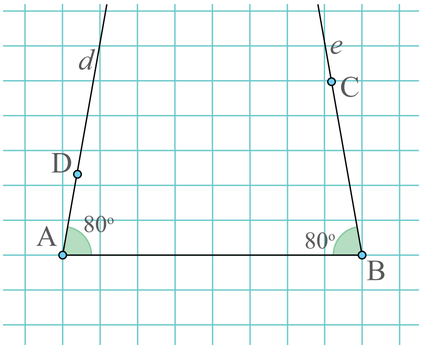
Exemplu: Desenează un patrulater convex $ABCD$, știind că $\sphericalangle A = \sphericalangle B = \sphericalangle C = 80°$.



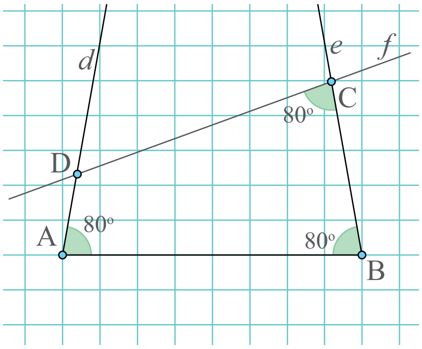
Pasul 1: Construim segmentul AB, cu lungimea de $3\ cm$.



Pasul 2: Construim semidreapta d suport a laturii AD, astfel încât unghiul $\sphericalangle DAB = 80°$, dar nu fixăm încă poziția punctului D pe semidreapta d.



Pasul 3: Procedăm analog și pentru semidreapta BC, astfel încât $\sphericalangle CBA = 80°$. Construim dreapta e în același semiplan în care am construit și semidreapta suport a laturii AD.



Pasul 4: Fixăm o poziție pentru punctul C și construim semidreapta f suport a laturii CD astfel încât $\sphericalangle BCD = 80°$. Punctul D va fi la intersecția semidreptelor d și f.

Atenție! În cazul în care semidreapta f intersectează segmentul AB, obținem *Figura 5*. Este, în acest caz, patrulaterul $ABCD$ un patrulater convex?

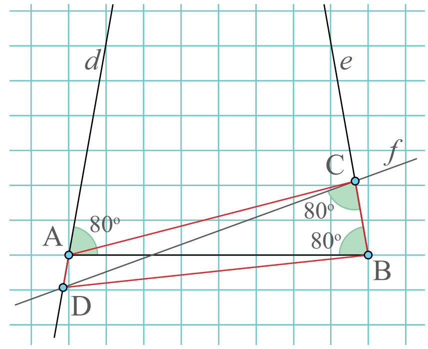


Figura 5

6. În *Figura 6* sunt reprezentate trei localități A, B și C. Consilierii locali ai fiecărei localități doresc să realizeze un proiect în care să determine cea mai potrivită locație pentru un aeroport D, care să fie la îndemâna cetățenilor din fiecare localitate. Regiunile din jurul celor trei localități au fost numerotate cu numere de la 1 la 7. Cei trei consilieri au observat următoarele: regiunea 1 este una montană, unde costurile construirii unui aeroport ar fi foarte mari, iar regiunile 2, 3 și 4 sunt regiuni împădurite, unde aceștia nu își doresc să construiască un aeroport. Le rămân astfel doar zonele 5, 6 și 7, zone de câmpie, unde construirea unui aeroport nu este complicată. Consilierul localității A propune ca aeroportul să fie construit în regiunea 6, cel din localitatea B în regiunea 5, iar cel din localitatea C în regiunea 7.

În care dintre aceste situații patrulaterul $ABCD$ este unul convex? Dar unul concav? *Indicație: Desenează câte un astfel de patrulater pentru fiecare situație.*

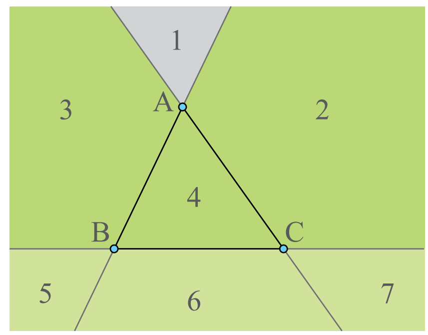
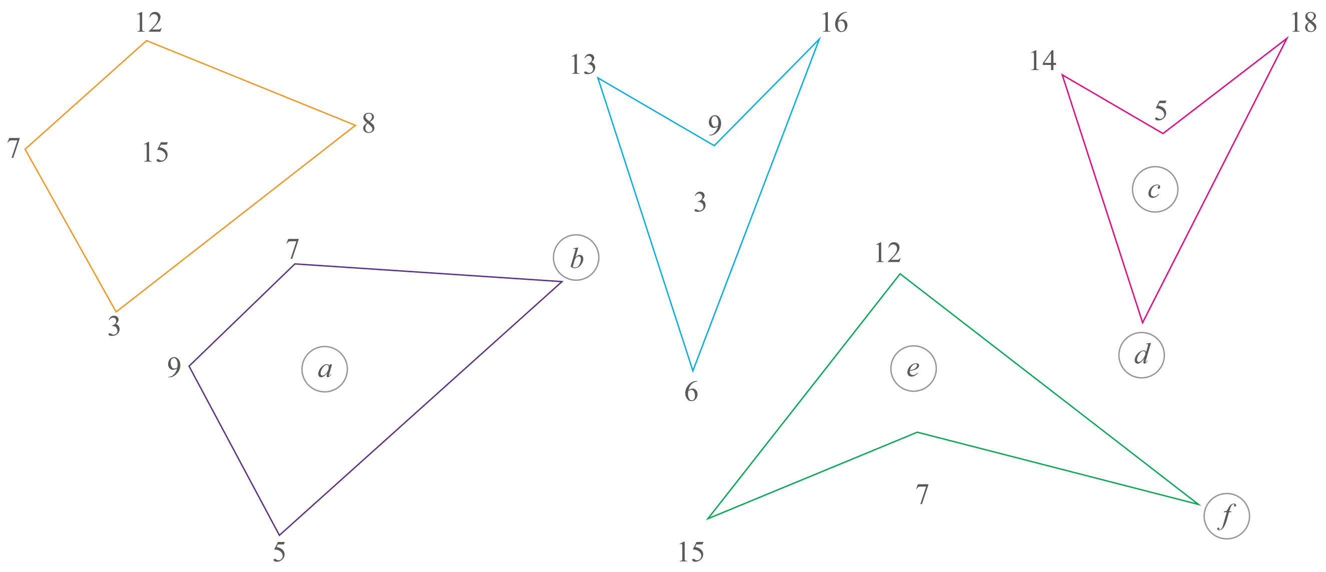


Figura 6

Joc

Numere și patrulatere

Găsește regula și completează numerele lipsă din fiecare patrulater.



Paralelogramul: proprietăți

Observă și descoperă!

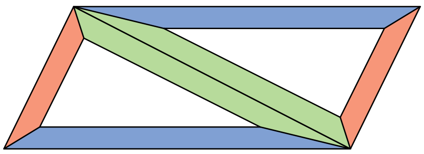


Figura 7

1. Jucându-se cu două echere identice, la un moment dat, Sara le-a așezat ca în *Figura 7* și a exclamat: Am obținut un patrulater convex!

a) Este adevărată afirmația Sarei?

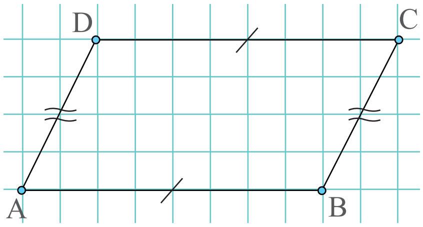
b) Ce poți spune despre laturile colorate cu culoarea roșie? Dar despre laturile colorate cu culoarea albastră?

c) Cum justifici aceste afirmații?

Indiciu:
Amintește-ți de dreptele tăiate de o secantă și de unghiurile alterne interne.

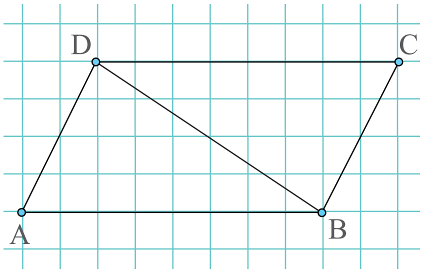
Important

• Numim **paralelogram** patrulaterul convex cu laturile opuse paralele.



Dacă $ABCD$ este paralelogram, atunci $AB \parallel CD$ și $AD \parallel BC$.

Dacă $AB \parallel CD$ și $AD \parallel BC$, atunci $ABCD$ este paralelogram.



• În orice paralelogram, laturile opuse sunt congruente două câte două.

Ipoteză: $ABCD$ - paralelogram

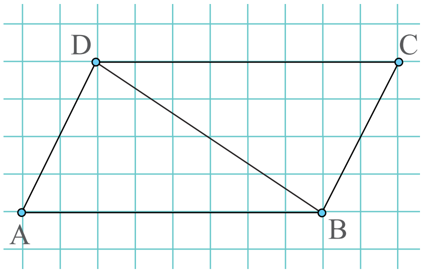
Concluzie: $AB \equiv CD$ și $AD \equiv BC$.

Demonstrație:

Construim diagonala BD și obținem triunghiurile ABD și BCD în care:

- $BD \equiv BD$ (latură comună)
- $\sphericalangle ADB \equiv \sphericalangle CBD$ (sunt unghiuri alterne interne pentru $AD \parallel BC$ și BD secantă)
- $\sphericalangle ABD \equiv \sphericalangle CDB$ (sunt unghiuri alterne interne pentru $AB \parallel CD$ și BD secantă)

Rezultă, conform cazului ULU de congruență a triunghiurilor, că $\Delta ABD \equiv \Delta CDB$, de unde $AB \equiv CD$ și $AD \equiv BC$.



• Orice patrulater convex în care laturile opuse sunt congruente două câte două este paralelogram.

Ipoteză: $ABCD$ - patrulater convex, $AB \equiv CD$ și $AD \equiv BC$

Concluzie: $ABCD$ - paralelogram

Demonstrație:

Construim diagonala BD și obținem triunghiurile ABD și BCD în care:

- $BD \equiv BD$ (latură comună)
- $AB \equiv CD$ (din ipoteză)
- $AD \equiv BC$ (din ipoteză)

Rezultă, conform cazului LLL de congruență a triunghiurilor, că $\Delta ABD \equiv \Delta CDB$, de unde $\sphericalangle ADB \equiv \sphericalangle CBD$ și $\sphericalangle ABD \equiv \sphericalangle CDB$.

Acum, luând dreptele AD și BC și secanta BD, avem $\sphericalangle ADB \equiv \sphericalangle CBD$ (unghiuri alterne interne). Rezultă $AD \parallel BC$ și, cu aceeași metodă, obținem $AB \parallel CD$, deci $ABCD$ este paralelogram.

• **În orice paralelogram unghiurile opuse sunt congruente două câte două.**

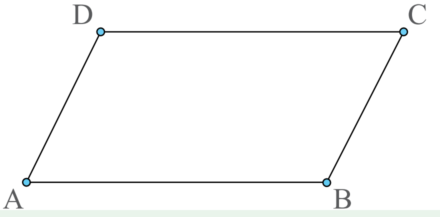
Justificare: Din $\Delta ABD \equiv \Delta CDB$ demonstrat anterior deducem că $\sphericalangle DAB \equiv \sphericalangle BCD$. Din aceeași congruență de triunghiuri, avem $\sphericalangle ADB \equiv \sphericalangle CBD$ și $\sphericalangle CDB \equiv \sphericalangle ABD$. Adunând cele două relații, avem $\sphericalangle ADB + \sphericalangle CDB \equiv \sphericalangle CBD + \sphericalangle ABD$, adică $\sphericalangle ADC \equiv \sphericalangle ABC$.

• **Orice patrulater convex în care unghiurile opuse sunt congruente două câte două este paralelogram.**

Ipoteză: $ABCD$ - patrulater convex;

$\sphericalangle DAB \equiv \sphericalangle BCD$; $\sphericalangle ADC \equiv \sphericalangle ABC$

Concluzie: $ABCD$ - paralelogram



Demonstrație: În orice patrulater convex suma măsurilor unghiurilor este de 360°. Prin urmare, avem relația $\sphericalangle DAB + \sphericalangle ABC + \sphericalangle BCD + \sphericalangle CDA = 360°$.

Din ipoteză $\sphericalangle DAB \equiv \sphericalangle BCD$ și $\sphericalangle ADC \equiv \sphericalangle ABC$. Putem rescrie suma de mai sus astfel: $\sphericalangle DAB + \sphericalangle ADC + \sphericalangle DAB + \sphericalangle CDA = 360°$ sau $2 \cdot \sphericalangle DAB + 2 \cdot \sphericalangle ADC = 360°$ și prin împărțire la 2 avem $\sphericalangle DAB + \sphericalangle ADC = 180°$. Aceasta înseamnă că, pentru dreptele AB și CD și secanta AD, avem o pereche de unghiuri interne de aceeași parte a secantei suplementare. Rezultă de aici că $AB \parallel CD$ (1) și, analog, obținem $AD \parallel BC$ (2). Din (1) și (2) rezultă că $ABCD$ este paralelogram.

• **În orice paralelogram, oricare două unghiuri alăturate sunt suplementare.**

Ipoteză: $ABCD$ - paralelogram

Concluzie: $\sphericalangle DAB + \sphericalangle ADC = 180°$, $\sphericalangle DAB + \sphericalangle ABC = 180°$, $\sphericalangle ABC + \sphericalangle BCD = 180°$ și $\sphericalangle BCD + \sphericalangle CDA = 180°$

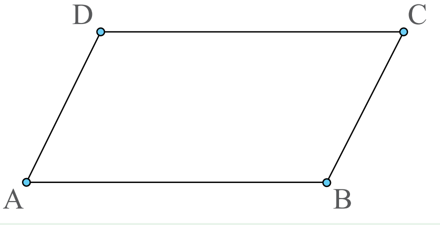
Demonstrație: Din $AB \parallel CD$ ($ABCD$ este paralelogram) și AD secantă obținem $\sphericalangle DAB + \sphericalangle ADC = 180°$ (unghiuri interne de aceeași parte a secantei).

• **Orice patrulater convex în care oricare două unghiuri alăturate sunt suplementare este paralelogram.**

Ipoteză: $ABCD$ - patrulater convex

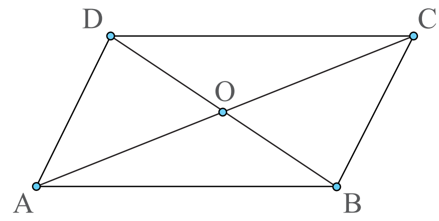
$\sphericalangle DAB + \sphericalangle ADC = 180°$, $\sphericalangle DAB + \sphericalangle ABC = 180°$,

$\sphericalangle ABC + \sphericalangle BCD = 180°$ și $\sphericalangle BCD + \sphericalangle CDA = 180°$.



Concluzie: $ABCD$ - paralelogram

Demonstrație: Pentru dreptele AB și CD și secanta AD, unghiurile DAB și ADC sunt unghiuri interne de aceeași parte a secantei. Cum, din ipoteză $\sphericalangle DAB + \sphericalangle ADC = 180°$, rezultă $AB \parallel CD$ și, cu aceeași metodă, obținem $AD \parallel BC$, deci $ABCD$ este un paralelogram.



• **În orice paralelogram, diagonalele au același mijloc.**

Ipoteză: $ABCD$ - paralelogram, $\{O\} = AC \cap BD$

Concluzie: $AO \equiv OC$ și $BO \equiv OD$

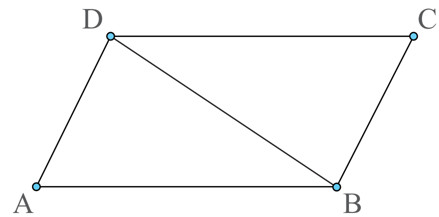
Demonstrație: În ΔAOD și ΔBOC avem $AD \equiv BC$ (într-un paralelogram, laturile opuse sunt congruente), $\sphericalangle ADO \equiv \sphericalangle CBO$ (sunt unghiuri alterne interne pentru $AD \parallel BC$ și BD secantă) și $\sphericalangle DAO \equiv \sphericalangle BCO$ (sunt unghiuri alterne interne pentru $AD \parallel BC$ și AC secantă). Rezultă, conform cazului ULU de congruență a triunghiurilor, că $\Delta AOD \equiv \Delta COB$, de unde $AO \equiv OC$ și $BO \equiv OD$.

• **Orice patrulater convex în care diagonalele au același mijloc este paralelogram.**

Ipoteză: $ABCD$ - patrulater convex, $\{O\} = AC \cap BD$, $AO \equiv OC$, $BO \equiv OD$

Concluzie: $ABCD$ - paralelogram

Demonstrație: În ΔAOD și ΔBOC avem din ipoteză $AO \equiv OC$, $BO \equiv OD$ și $\sphericalangle AOD \equiv \sphericalangle BOC$ (sunt unghiuri opuse la vârf). Rezultă, din cazul LUL de congruență a triunghiurilor, că $\Delta AOD \equiv \Delta COB$, de unde $\sphericalangle ADO \equiv \sphericalangle CBO$ și $\sphericalangle ABO \equiv \sphericalangle CDO$. Acum, luând dreptele AD și BC și secanta BD, avem $\sphericalangle ADB \equiv \sphericalangle CBD$ (unghiuri alterne interne), de unde obținem că $AD \parallel BC$. Prin aceeași metodă, obținem $AB \parallel CD$, de unde rezultă că $ABCD$ este un paralelogram.



• **Orice patrulater convex în care două dintre laturi sunt paralele și congruente este paralelogram.**

Ipoteză: $ABCD$ - patrulater convex, $AD \parallel BC$, $AD \equiv BC$

Concluzie: $ABCD$ - paralelogram

Demonstrație: Construim diagonala BD și în triunghiurile ABD și CDB avem $BD \equiv BD$ (latură comună), $AD \equiv BC$ (din ipoteză) și $\sphericalangle ADB \equiv \sphericalangle CBD$ (unghiuri alterne interne pentru $AD \parallel BC$ și secanta BD). Rezultă, conform cazului LUL de congruență a triunghiurilor, că $\Delta ABD \equiv \Delta CDB$, de unde $AB \equiv CD$. De aici și din $AD \equiv BC$, obținem că $ABCD$ este un paralelogram (patrulaterul convex cu laturile opuse congruente este un paralelogram).

Exersează!

2. Stabilește dacă următoarele propoziții sunt adevărate (**A**) sau false (**F**):

a) Unghiurile alăturate ale unui paralelogram sunt complementare.

b) Dacă diagonalele au același mijloc, atunci patrulaterul este paralelogram.

c) În patrulaterul $ABCD$ știm că $AB \parallel CD$ și $AD \nparallel BC$, deci patrulaterul este paralelogram.

d) Un paralelogram are toate unghiurile ascuțite.

e) Unghiurile opuse ale unui paralelogram sunt congruente.

f) Laturile opuse ale unui paralelogram sunt paralele, dar nu sunt congruente.

g) Laturile opuse ale unui paralelogram sunt paralele și congruente.

h) Patrulaterul cu o pereche de laturi paralele și congruente este paralelogram.

3. Calculează măsura unghiurilor necunoscute ale paralelogramului $ABCD$, în fiecare caz:

a) $\sphericalangle A = 62°$; b) $\sphericalangle B = 102°$; c) $\sphericalangle C = 110°$; d) $\sphericalangle D = 72°$; e) $\sphericalangle B = 32°$.

4. Desenează paralelogramul $ABCD$, respectând condițiile date:

a) $\sphericalangle A = 100°$, $AB = 5\ cm$, $AD = 4\ cm$; b) $\sphericalangle B = 70°$, $AB = 6\ cm$, $BC = 5\ cm$;
c) $\sphericalangle C = 70°$, $BC = 8\ cm$, $CD = 6\ cm$; d) $\sphericalangle D = 70°$, $AD = 6\ cm$, $AB = 7\ cm$.

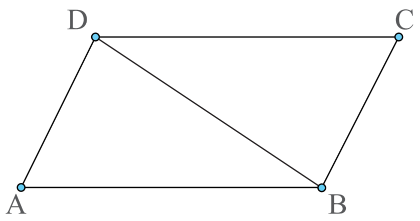


Figura 8

5. Se consideră triunghiul ABC și mediana AM, $M \in BC$, dusă din vârful A. Se prelungește mediana AM cu segmentul MD, astfel încât $AM = MD$. Arată că $ABDC$ este paralelogram.

6. Pe laturile AB și CD ale paralelogramului $ABCD$ se consideră punctele E, respectiv F, astfel încât $AE = \frac{1}{3}AB$ și $CF = \frac{2}{3}CD$. Arată că patrulaterele $AEFD$ și $BEFC$ sunt paralelograme.

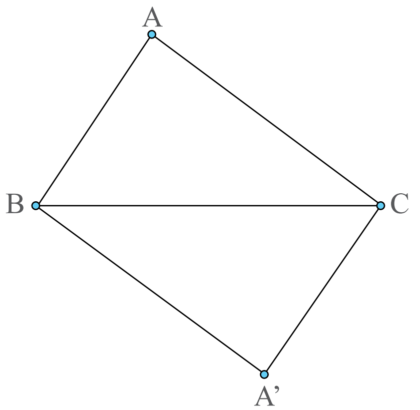


Figura 9

7. În patrulaterul $ABCD$ din *Figura 8* avem $\sphericalangle ABD \equiv \sphericalangle CDB$ și $\sphericalangle DAB \equiv \sphericalangle DCB$. Arată că patrulaterul $ABCD$ este un paralelogram.

8. În *Figura 9*, $\Delta ABC \equiv \Delta A'CB$. Demonstrează că $ABA'C$ este paralelogram.

9. Se consideră $ABCD$ un paralelogram și fie A' simetricul punctului A față de B, B' simetricul punctului B față de C, C' simetricul punctului C față de D și D' simetricul punctului D față de A. Demonstrează că $A'B'C'D'$ este un paralelogram.

10. În *Figura 10* este reprezentată schematic sigla unei companii. Se cunosc relațiile: $AA' \equiv BB' \equiv CC' \equiv DD' \equiv EE'$, $AB \equiv BC \equiv CD \equiv DE \equiv A'B' \equiv B'C' \equiv C'D' \equiv D'E'$ și $\sphericalangle A'AB \equiv \sphericalangle C'CB \equiv \sphericalangle C'CD \equiv \sphericalangle E'ED$. Demonstrează că:

a) $ACC'A'$ este paralelogram;
b) $ADD'A'$ este paralelogram;
c) $BEE'B'$ este paralelogram;
d) $ACDB$ este paralelogram;
e) Punctele A, C și E sunt coliniare;
f) $BCE'D'$ este paralelogram.

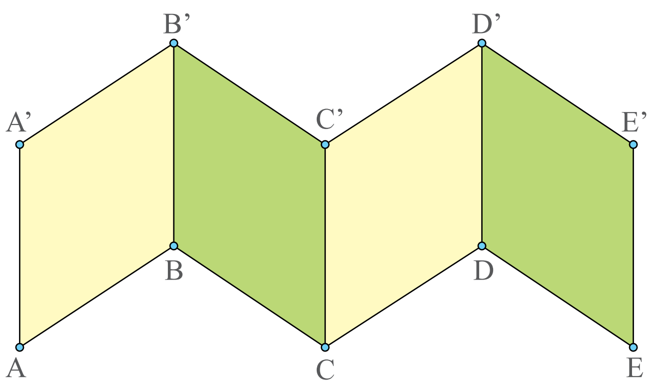


Figura 10

11. În *Figurile 11, 12* și *13* sunt reprezentate trei tipuri distincte de parcări, realizate pe o stradă cu sens unic.

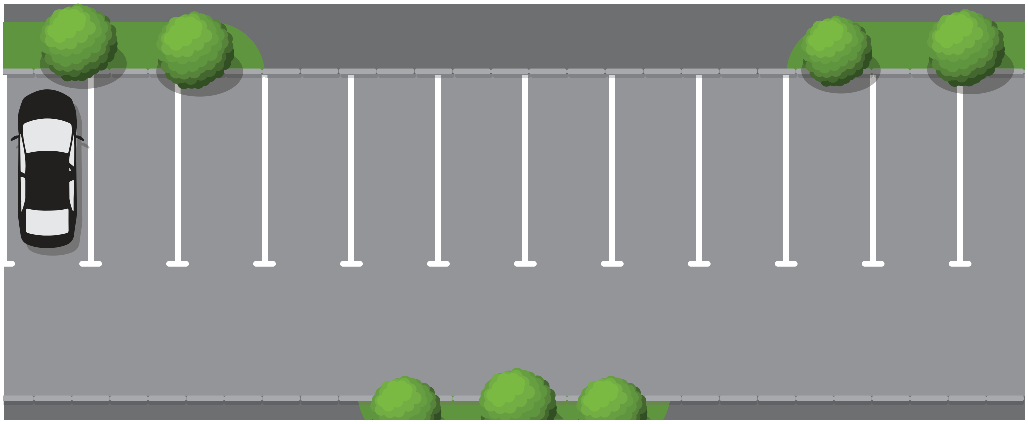


Figura 11

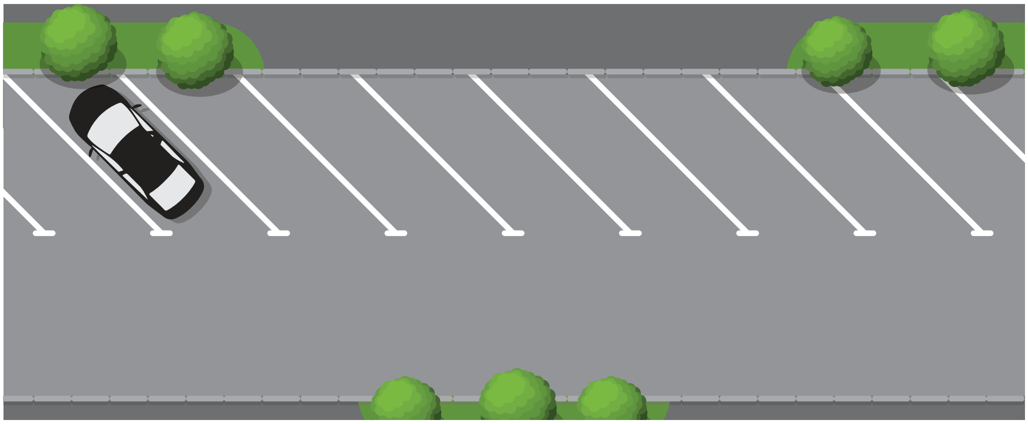


Figura 12

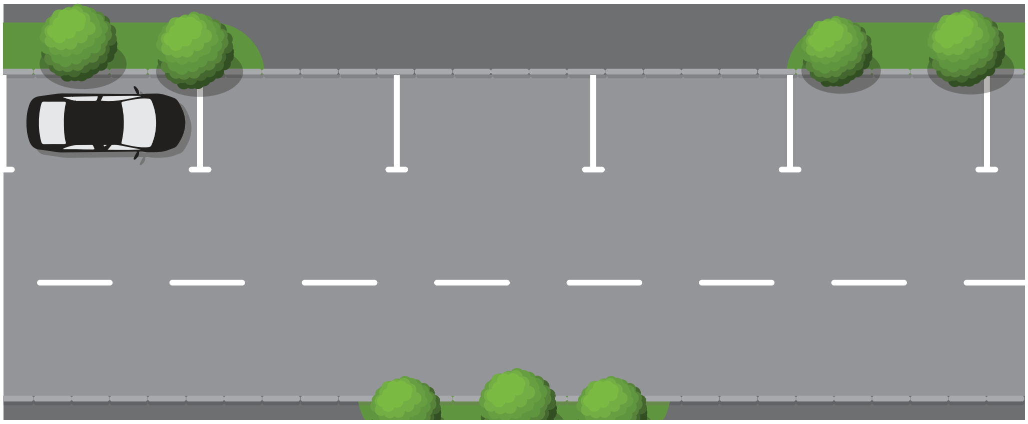


Figura 13

a) Verifică, cu ajutorul unei rigle, că toate locurile de parcare, reprezentate în *Figurile 11, 12* și *13* sunt paralelograme.

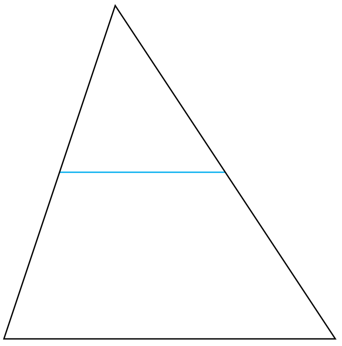
b) Dacă, în fiecare dintre aceste figuri, lățimea drumului ar fi aceeași, stabilește care tip de parcare este mai potrivit în situaţia în care:

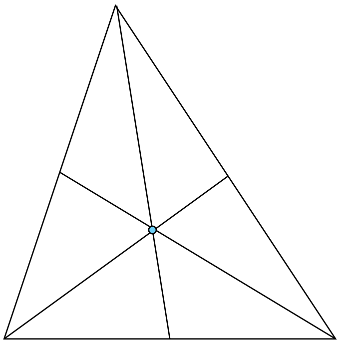
- dorim să avem un număr mai mare de locuri de parcare;
- dorim să avem mai mult spațiu pentru a circula cu mașinile.

Ce observi la *Figura 12*?

Aplicații în geometria triunghiului: linie mijlocie în triunghi, centrul de greutate al unui triunghi

Folosind proprietățile paralelogramului, vei afla lucruri interesante despre triunghi.





Observă și descoperă!

1. Victor are de rezolvat următoarea problemă: *Se consideră un triunghi ABC, punctele M și N mijloacele laturilor AB, respectiv AC și punctul P simetricul punctului M față de punctul N (Figura 14).*

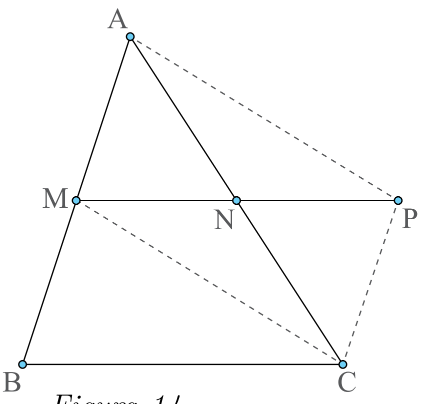


Figura 14

a) Arată că patrulaterul $AMCP$ este paralelogram;
b) Demonstrează că patrulaterul $MBCP$ este paralelogram;
c) Dedu că $MN \parallel BC$ și că $MN = \dfrac{BC}{2}$.

Observă cum rezolvă Victor această problemă:

***Ipoteza**: ABC - triunghi*
$AM \equiv BM$, $AN \equiv CN$, $MN \equiv NP$

***Concluzia**:*
a) $AMCP$ - paralelogram;
b) $MBCP$ - paralelogram;
c) $MN \parallel BC$ și $MN = \dfrac{BC}{2}$.

***Demonstrație**:*

a) Din $AN \equiv CN$ și $MN \equiv NP$ (din ipoteză), rezultă $AMCP$ este paralelogram, deoarece diagonalele au același mijloc.

b) Avem $PC \equiv AM$ (din $AMCP$ - paralelogram) și $AM \equiv BM$ (din ipoteză), de unde obținem $PC \equiv BM$. Dar $PC \parallel AM$ (din $AMCP$ - paralelogram), iar cum punctele A, M și B sunt coliniare, obținem $PC \parallel BM$. Prin urmare, $MBCP$ este paralelogram (două dintre laturi sunt paralele și congruente).

c) $MBCP$ - paralelogram $\Rightarrow MP \parallel BC$ și $MP \equiv BC$ (într-un paralelogram, laturile opuse sunt paralele și congruente). Din $MP \parallel BC$ rezultă $MN \parallel BC$, iar din $MP \equiv BC$ și $MN = \dfrac{MP}{2}$ (P este simetricul lui M față de N) rezultă $MN = \dfrac{BC}{2}$.

Important

• Numim **linie mijlocie în triunghi** segmentul care unește mijloacele a două laturi ale triunghiului.

• Un triunghi are 3 linii mijlocii. Triunghiul determinat de liniile mijlocii se numește **triunghiul median**.

• **Într-un triunghi, o linie mijlocie este paralelă cu a treia latură și are lungimea egală cu jumătate din lungimea acestei laturi. (Proprietatea liniei mijlocii)**

Observă și descoperă!

2. **Problemă rezolvată.** Într-un triunghi ABC, prin M mijlocul laturii AB construim $MN \parallel BC$, $N \in AC$ (*Figura 15*). Demonstrează că punctul N este mijlocul laturii AC.

Rezolvare:

Ipoteză: ABC - triunghi; $AM \equiv BM$; $MN \parallel BC$;

Concluzie: $AN \equiv CN$

Demonstrație: Presupunem că punctul N nu este mijlocul laturii AC și construim punctul P mijlocul laturii AC. Rezultă că MP este linie mijlocie în triunghiul ABC și atunci $MP \parallel BC$. Dar, din ipoteză, $MN \parallel BC$, ceea ce înseamnă că prin punctul M trec două drepte paralele distincte la dreapta BC, ceea ce este imposibil. Prin urmare, presupunerea făcută este falsă, de unde ne rezultă că punctul N este mijlocul laturii AC.

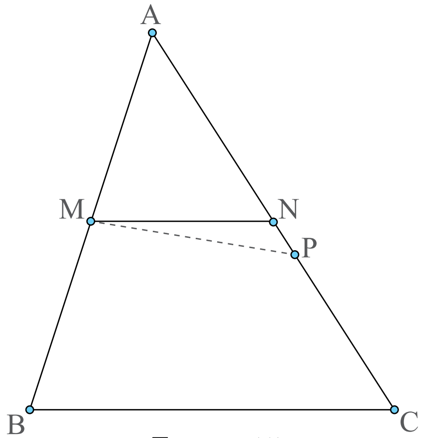


Figura 15

Important

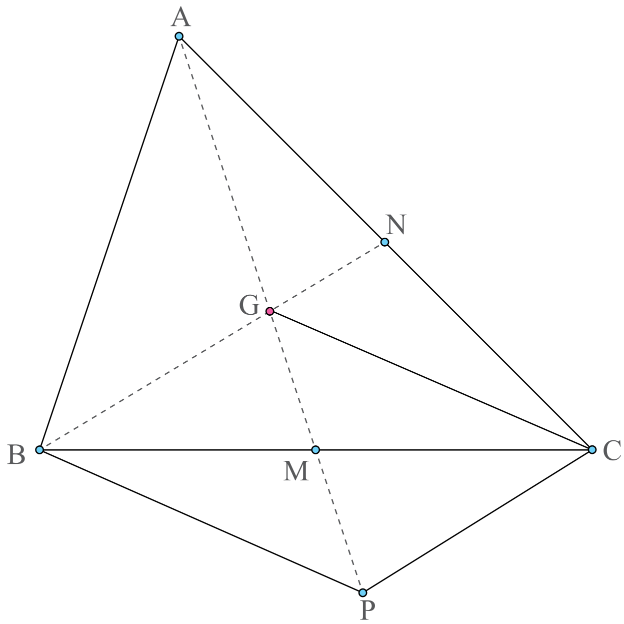
• Problema anterioară ne spune că: **în orice triunghi, paralela prin mijlocul unei laturi la una dintre laturi trece prin mijlocul celeilalte laturi. (Reciproca proprietății liniei mijlocii)**

3. Sara rezolvă următoarea problemă: *Se consideră triunghiul ABC în care medianele AM, $M \in BC$ și BN, $N \in AC$ se intersectează în punctul G. Notăm cu P simetricul punctului G față de punctul M. Arată că:*

a) $BPCG$ *este paralelogram;*

b) $GN = \dfrac{1}{2}CP$;

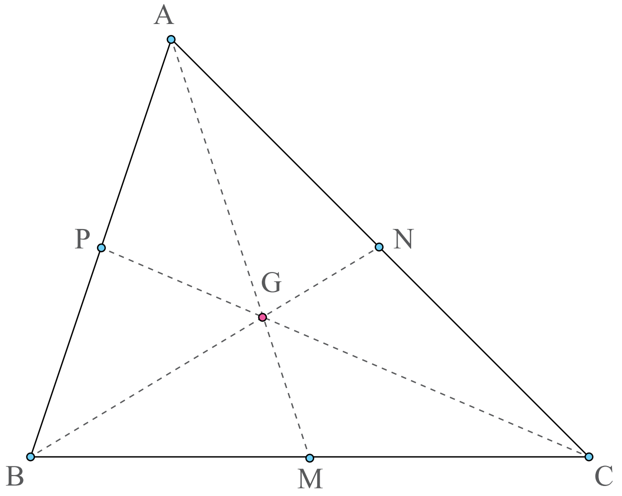
c) $GN = \dfrac{1}{3}BN$ *și* $GB = \dfrac{2}{3}BN$.



Cum gândește Sara	Cum scrie Sara
Pentru a demonstra că un patrulater este paralelogram am mai multe posibilități. Deoarece în problemă se vorbește despre mediană și simetrie, ar fi bine să mă gândesc la diagonale.	a) Cum $BM \equiv CM$ (AM - mediană) și $GM = MP$ (din ipoteză), atunci $BPCG$ este paralelogram (diagonalele au același mijloc).
Privind figura, sunt tentată să spun că GN este linie mijlocie în triunghiul APC. Dar am argumente? La punctul a) am arătat că $BPCG$ este paralelogram, deci BN și PC sunt paralele. Cum N este mijlocul segmentului AC (BN este mediană), pot afirma că GN este linie mijlocie în triunghiul APC.	b) În triunghiul APC avem $PC \parallel GN$ (din a)) și $AN \equiv NC$ (din ipoteză), de unde obținem că $AG \equiv GP$ și deci GN este linie mijlocie în triunghiul APC. Rezultă că $GN = \frac{1}{2}PC$.
L-am exprimat pe GN cu ajutorul lui PC, dar eu vreau cu ajutorul lui BN. Pe PC îl pot înlocui cu BG deoarece $BPCG$ este paralelogram, iar BG împreună cu GN formează chiar BN.	c) Știm de la punctul a) că $GN = \frac{1}{2}CP$ și că $PC \equiv BG$. Obținem astfel că $GN = \frac{1}{2}PC = \frac{1}{2}BG \Rightarrow BG = 2GN$. Cum $BG + GN = BN \Rightarrow 3GN = BN \Rightarrow$ $\Rightarrow GN = \frac{1}{3}BN$. Din $BG = 2GN$ obținem $BG = \frac{2}{3}BN$.

Important

• În orice triunghi, centrul de greutate (intersecția medianelor) se află, pe oricare mediană, la două treimi de vârf și o treime de latură.



$$AG = \frac{2}{3}AM \text{ și } GM = \frac{1}{3}AM$$

$$BG = \frac{2}{3}BN \text{ și } GN = \frac{1}{3}BN$$

$$CG = \frac{2}{3}CP \text{ și } GP = \frac{1}{3}CP$$

Exersează!

4. În triunghiul ABC, se cunosc lungimile laturilor: $AB = 8$ cm, $AC = 10$ cm și $BC = 12$ cm. Calculează perimetrul triunghiului AMN, dacă M și N sunt mijloacele laturilor AB, respectiv AC.

5. Se consideră M, N și P mijloacele laturilor DE, DF, respectiv EF, ale triunghiului DEF. Arată că patrulaterul $DMPN$ este paralelogram.

6. În triunghiul ABC, se consideră D, E și F mijloacele laturilor AB, AC, respectiv BC. Calculează perimetrul triunghiului DEF în fiecare caz:

a) $AB = 6$ cm, $AC = 8$ cm, $BC = 12$ cm; b) $AB = 16$ cm, $AC = 18$ cm, $BC = 22$ cm;
c) $AB = 5$ cm, $AC = 6$ cm, $BC = 7$ cm; d) $AB = 9$ cm, $AC = 11$ cm, $BC = 13$ cm.

7. Se consideră G centrul de greutate al triunghiului ABC și A', B' și C' mijloacele laturilor BC, AC, respectiv AB.

a) Dacă $GA' = 5$ cm, calculează lungimea segmentelor GA și AA'.
b) Dacă $GB = 6$ cm, calculează lungimea segmentelor GB' și BB'.
c) Dacă $CC' = 9$ cm, calculează lungimea segmentelor GC și GC'.

8. În paralelogramul $ABCD$, se consideră E mijlocul laturii BC și F punctul de intersecție al dreptelor AC și DE.

a) Arată că punctul F este centrul de greutate al triunghiului BCD.
b) Dacă N este intersecția dreptelor BF și DC, iar $AB = 10$ cm, determină lungimea segmentului DN.

9. Arată că mijloacele laturilor unui patrulater convex sunt vârfurile unui paralelogram.

10. Se consideră triunghiurile ABC și ACD, cu B și D aflate de o parte și de alta a dreptei AC. Se consideră M mijlocul segmentului AB, $N \in AC$ astfel încât $MN \parallel BC$ și $P \in AD$ astfel încât $NP \parallel CD$.

Dacă punctele B, C și D sunt coliniare, demonstrează că punctele M, N și P sunt coliniare și că $2MP = BC + CD$.

11. Se consideră $ABCD$ un paralelogram, M mijlocul lui AD, N mijlocul lui AB, Q mijlocul lui BC și P simetricul punctului Q față de B.

a) Arată că $MPBD$ este paralelogram.
b) Demonstrează că $APBM$ este paralelogram.
c) Arată că punctele M, N și P sunt coliniare.

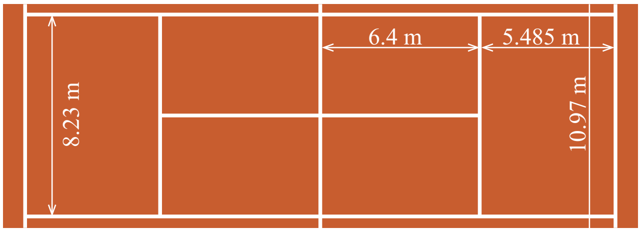
12. În triunghiul ABC, se consideră medianele AM, BN și CP și G centrul de greutate al triunghiului. Se consideră $AM \cap PN = \{Q\}$, $BN \cap MP = \{R\}$ și $CP \cap MN = \{S\}$. Demonstrează că:

a) $\Delta APN \equiv \Delta PBM \equiv \Delta NMC \equiv \Delta MNP$;
b) patrulaterul $APMN$ este paralelogram;
c) punctul S este mijlocul segmentului MN;
d) punctul G este centrul de greutate al triunghiului MNP.

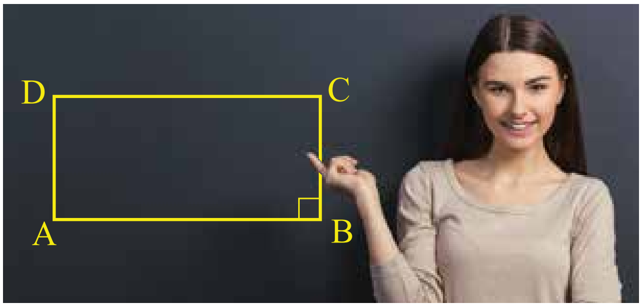
Este adevărată propoziția următoare: *Punctul G este centrul de greutate al triunghiului QRS*?

13. În triunghiul ABC, AM, $M \in BC$, și BN, $N \in AC$, sunt mediane. Se consideră A' simetricul punctului A față de punctul M și B' simetricul lui B față de punctul N. Demonstrează că punctele A', C și B' sunt coliniare.

Paralelograme particulare: dreptunghi; proprietăți



Terenul de tenis, terenul de handbal, terenul de fotbal, toate au formă de dreptunghi. Proprietățile dreptunghiului te vor ajuta să verifici cât de corect au fost trasate.



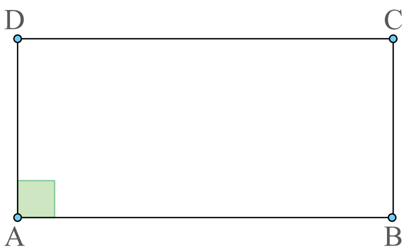
Imaginea 1 - Dreptunghi desenat pe tablă

Observă și descoperă!

1. Sara a desenat pe tablă un paralelogram care are un unghi drept (de 90°), ca în *Imaginea 1*. Care sunt măsurile celorlalte trei unghiuri? Justifică răspunsurile date.

Important

- Numim **dreptunghi** paralelogramul cu un unghi drept.

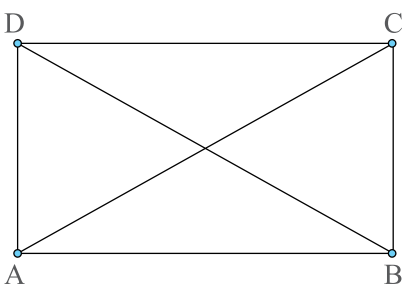


Dacă $ABCD$ este dreptunghi, atunci $ABCD$ este paralelogram și $\sphericalangle DAB = 90°$.

Dacă $ABCD$ este paralelogram și $\sphericalangle DAB = 90°$, atunci $ABCD$ este dreptunghi.

- Un dreptunghi are toate unghiurile drepte.

- Dreptunghiul, fiind un paralelogram, are toate proprietățile acestuia:
  - ▶ laturile opuse sunt paralele și congruente;
  - ▶ diagonalele au același mijloc.



- În orice dreptunghi diagonalele sunt congruente.

Ipoteză: $ABCD$ - dreptunghi

Concluzie: $AC \equiv BD$

Demonstrație: Triunghiurile ABC și ABD sunt dreptunghice ($\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle BAD = 90°$), $AB \equiv AB$ (latură comună) și $BC \equiv AD$ (laturi opuse).

Rezultă, conform cazului de congruență a triunghiurilor dreptunghice CC, că $\Delta ABC \equiv \Delta BAD$, de unde $AC \equiv BD$.

- Orice paralelogram care are diagonalele congruente este dreptunghi.

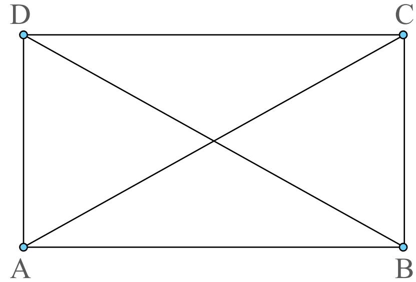
Ipoteză: $ABCD$ - paralelogram, $AC \equiv BD$

Concluzie: $ABCD$ - dreptunghi

Demonstrație: Trebuie arătat că paralelogramul $ABCD$ are un unghi drept. În triunghiurile ABC și ABD avem $AB \equiv AB$ (latură comună), $AC \equiv BD$ (din ipoteză) și $BC \equiv AD$ (laturi opuse).

Rezultă, conform cazului LLL de congruență a triunghiurilor, că $\Delta ABC \equiv \Delta BAD$, de unde $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle BAD$. Dar $\sphericalangle ABC + \sphericalangle BAD = 180°$ și atunci $\sphericalangle ABC = 90°$.

În concluzie, $ABCD$ este dreptunghi.



Exersează!

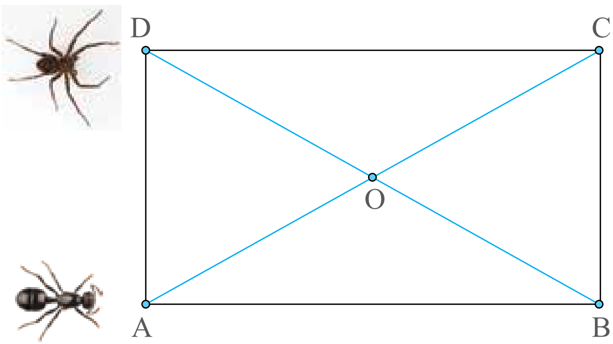


Figura 16

2. O furnică și un păianjen se deplasează pe laturile și pe diagonalele unui dreptunghi (*Figura 16*) și apoi se întorc în punctele de plecare. Furnica se deplasează pe traseul $A - B - C - A$, iar păianjenul pe traseul $D - C - B - D$. Care dintre insecte a parcurs o distanță mai mare?

3. Se consideră paralelogramul $ABCD$ și O punctul de intersecție a diagonalelor acestuia. Arată că, dacă $AO \equiv DO$, atunci $ABCD$ este dreptunghi.

4. Se consideră ABC un triunghi dreptunghic în vârful A. Se consideră M simetricul punctului A față de mijlocul ipotenuzei. Arată că patrulaterul $ABMC$ este dreptunghi.

5. Se consideră paralelogramul $ABCD$ și O punctul de intersecție a diagonalelor acestuia. Unghiul DAC are măsura egală cu $30°$ și unghiul DOA are măsura egală cu $120°$.

a) Determină măsura unghiului ADO. b) Arată că $ABCD$ este dreptunghi.

Indicație: Amintește-ți cât este suma măsurilor unghiurilor unui triunghi.

6. Dreptunghiul $ABCD$ are proprietatea că lungimea diagonalei AC este de două ori mai mare decât a laturii AD. a) Determină măsura unghiului ABD. b) Demonstrează că triunghiul AOD este echilateral, unde $\{O\} = AC \cap BD$.

7. În *Figura 17*, $ABCD$ este dreptunghi și ABE este un triunghi echilateral.

a) Determină măsura unghiului DAE.

b) Arată că triunghiul DEC este isoscel.

c) Arată că triunghiurile DBE și CAE sunt congruente.

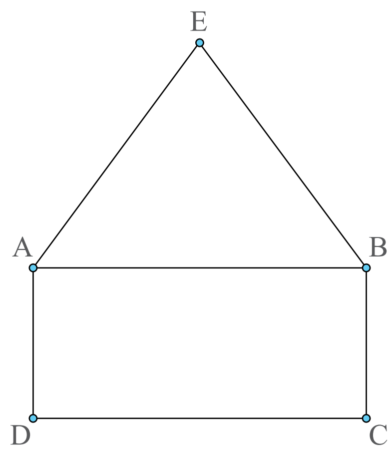


Figura 17

8. În triunghiul ABC ascuțitunghic, construiește $AD \perp BC$, cu $D \in BC$. Consideră apoi punctele M și N mijloacele laturilor AB și AC. Dacă E este simetricul punctului D față de M, iar F este simetricul punctului D față de N, demonstrează că:

a) $ADBE$ este dreptunghi;

b) $ADCF$ este dreptunghi;

c) punctele F, A și E sunt coliniare;

d) $\Delta DFE \equiv \Delta ACB$.

9. Se consideră A, B, C și D patru puncte pe un cerc astfel încât AC și BD sunt diametre. Demonstrează că $ABCD$ este un dreptunghi.

10. Ecaterina are o cameră foto, precum cea din *Imaginea 2*, și dorește să învețe mai multe despre cum funcționează procesul de zoom in/zoom out. După ce se documentează, ea se gândește la următorul procedeu: plecând de la o imagine dreptunghiulară $ABCD$, unde obiectul O ce trebuie fotografiat este la intersecția diagonalelor AC și BD, construiește imaginea $MNPQ$, unde M, N, P și Q sunt mijloacele segmentelor AO, BO, CO, respectiv DO. Ea nu este însă sigură dacă noua imagine are tot o formă dreptunghiulară și are nevoie de ajutorul tău. Demonstrează, așadar, că $MNPQ$ este tot un dreptunghi.

Imaginea 2

11. În *Figura 18* sunt reprezentate două vagoane de metrou privite de deasupra lor, vagonul 1 ($ABEF$) și vagonul 2 ($B'CDE$), conectate printr-o platformă elastică. Ambele vagoane au formă de dreptunghi. Atunci când metroul circulă în linie dreaptă, punctele B și B' coincid, precum în *Figura 19*. Ioana (I) se află în primul vagon, în capătul din stânga, la mijlocul laturii AF. Răzvan (R) se află în cel de-al doilea vagon, în capătul din dreapta, la mijlocul laturii CD.

a) În cazul în care vagonul se mișcă în linie dreaptă, demonstrează că distanța dintre Ioana și Răzvan este egală cu lungimea totală a celor două vagoane.

b) În *Figura 18* este reprezentat schematic cum arată cele două vagoane atunci când metroul virează. În această situație, Ioana și Răzvan de-abia se mai văd, amândoi uitându-se în direcția punctului E. Mai este acum distanța dintre cei doi egală cu lungimea totală a celor două vagoane? Justifică răspunsul dat.

c) Dacă în a doua situație, Ioana a observat că măsura unghiului IEF este de 15°, demonstrează că măsura unghiului DER este tot de 15° și calculează măsura unghiului BEB'.

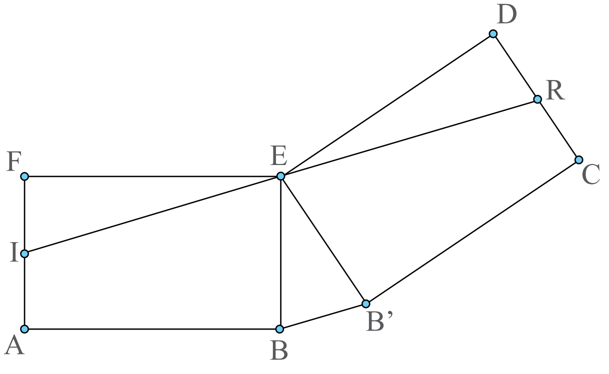


Figura 18

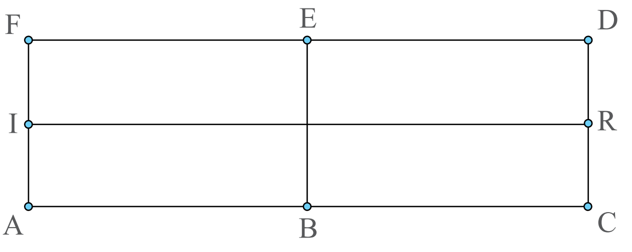
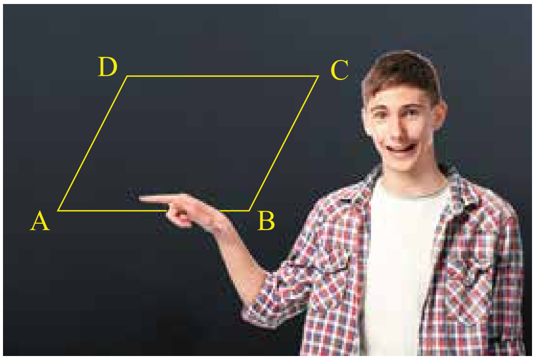


Figura 19

Paralelograme particulare: romb; proprietăți



Imaginea 3 – Paralelogram desenat pe tablă

Observă și descoperă!

1. Victor desenează un paralelogram cu două laturi alăturate congruente. Ce poți spune despre celelalte două laturi? Justifică răspunsul dat.

Important

• Numim **romb** paralelogramul cu două laturi alăturate congruente.

Dacă $ABCD$ este romb, atunci $ABCD$ este paralelogram și $AB \equiv AD$.

Dacă $ABCD$ este paralelogram și $AB \equiv AD$, atunci $ABCD$ este romb.

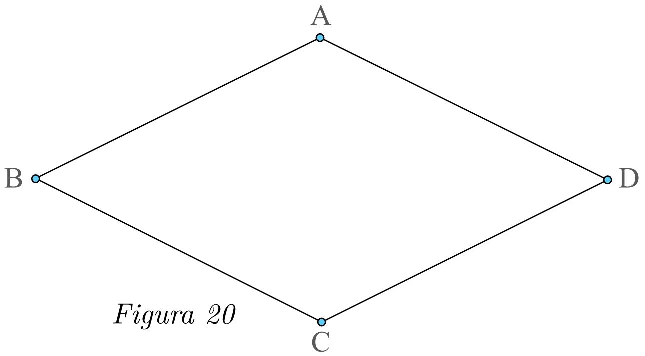


Figura 20

• Un romb are toate laturile congruente.

• Rombul fiind un paralelogram are toate proprietățile acestuia:
- ▷ Unghiurile opuse sunt congruente.
- ▷ Unghiurile alăturate sunt suplementare.
- ▷ Diagonalele au același mijloc.

• În orice romb **diagonalele sunt perpendiculare**.

• În orice romb **diagonalele sunt bisectoare** pentru unghiurile acestuia.

Ipoteză: $ABCD$ – romb.

Concluzie: $AC \perp BD$, AC – bisectoare pentru unghiurile BAD și BCD, BD – bisectoare pentru unghiurile ABC și ADC.

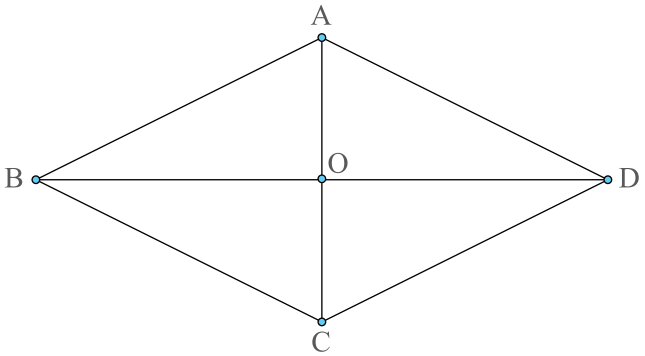


Figura 21

Demonstrație:

În triunghiul ABD, avem $AB \equiv AD$ (laturi ale rombului). Rezultă că triunghiul ABD este isoscel. Cum O este mijlocul diagonalei DB, deducem că AO este mediană în triunghiul ABD. Cum triunghiul ABD este isoscel și AO este mediană rezultă că AO este înălțime, deci $AC \perp BD$, dar și bisectoare a unghiului BAD.

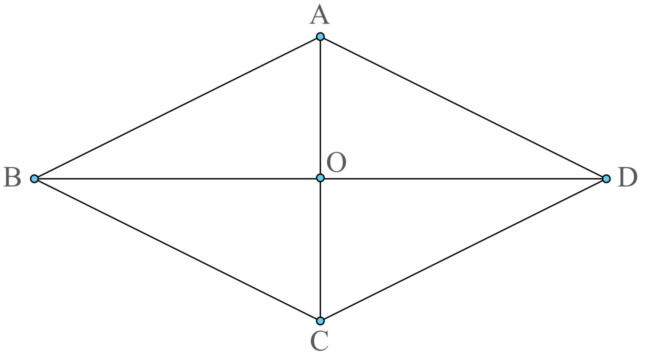
În același mod se arată că CO este bisectoare a unghiului BCD și BD este bisectoare pentru unghiurile ABC și ADC.

• Orice paralelogram cu diagonalele perpendiculare este romb.

Ipoteză: $ABCD$ - paralelogram; $AC \perp BD$

Concluzie: $ABCD$ – romb

Demonstrație: În triunghiul ABD, AO este înălțime (din $AC \perp BD$) și mediană (diagonalele paralelogramului au același mijloc). Rezultă că triunghiul ABD este isoscel cu $AB \equiv AD$. De aici și din $ABCD$ paralelogram deducem că $ABCD$ este romb.

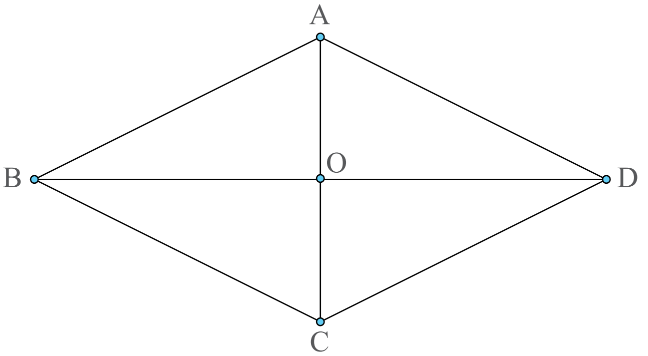


• Orice paralelogram în care o diagonală este bisectoare pentru unul dintre unghiurile acestuia este romb.

Ipoteză: $ABCD$ - paralelogram; AC – bisectoarea unghiului BAD

Concluzie: $ABCD$ – romb

Demonstrație: În triunghiul ABD, AO este bisectoare (din ipoteză) și mediană (diagonalele paralelogramului au același mijloc). Rezultă că triunghiul ABD este isoscel cu $AB \equiv AD$. De aici și din $ABCD$ paralelogram, deducem că $ABCD$ este romb.



Exersează!

2. Se consideră rombul $ABCD$. Determină măsurile unghiurilor rombului dacă:
a) $\sphericalangle CAB = 20°$; b) $\sphericalangle BDC = 35°$;
c) $\sphericalangle ADB = 50°$; d) $\sphericalangle ACB = 40°$.

Indiciu:
$ABCD$ - romb $\Rightarrow \sphericalangle BAD = 2 \cdot \sphericalangle CAB$
(Diagonalele sunt bisectoarele unghiurilor).

3. a) Se consideră rombul $ABCD$ cu $\sphericalangle ABD = 25°$. Determină măsurile unghiurilor rombului.
b) Se consideră rombul $MNPQ$ cu $\sphericalangle MNQ = 40°$. Determină măsurile unghiurilor rombului.
c) Se consideră rombul $PRST$ cu $\sphericalangle PST = 55°$. Determină măsurile unghiurilor rombului.

4. Arată că, dacă paralelogramul $ABCD$ are $\sphericalangle ABD = 20°$ şi $\sphericalangle CAB = 70°$, atunci $ABCD$ este romb.

5. Arată că, dacă paralelogramul $MNPQ$ are $\sphericalangle MPN = 50°$ şi $\sphericalangle QNP = 40°$, atunci $MNPQ$ este romb.

6. Determină măsurile unghiurilor rombului $ABCD$, dacă $BD = AB$.

7. Determină măsurile unghiurilor rombului $ABCD$, dacă $BC = 2CO$ unde O este punctul de intersecție a diagonalelor.

8. Pe prelungirea diagonalei BD a rombului $ABCD$ cu $\sphericalangle A < 60°$ se consideră punctul T astfel încât $AT = AC$. Arată că triunghiul ATC este echilateral.

9. Se consideră $ABCD$ un romb și $AC \cap BD = \{O\}$.
Arată că $\triangle AOB \equiv \triangle COB \equiv \triangle AOD \equiv \triangle COD$.

10. Se consideră $\triangle XYZ$ un triunghi isoscel cu $XY = XZ$ și punctele M, mijlocul laturii XY, N mijlocul laturii YZ și P mijlocul laturii XZ. Arată că patrulaterul $XMNP$ este romb.

11. În triunghiul ascuțitunghic ABC, construiește înălțimea $AD \perp BC$, $D \in BC$. se consideră A' simetricul lui A față de D, B' simetricul lui B față de D și C' simetricul lui C față de D. Demonstrează că $ABA'B'$ și $AC'A'C$ sunt romburi.

12. Se consideră $ABCD$ un dreptunghi și punctele M, N, P și Q mijloacele laturilor dreptunghiului. Demonstrează că $MNPQ$ este romb.

13. Se consideră $ABCD$ un romb și punctele M, N, P, Q mijloacele laturilor rombului. Demonstrează că $MNPQ$ este dreptunghi.

14. Se consideră $ABCD$ un romb și $AC \cap BD = O$. Dacă M, N, P și Q sunt mijloacele laturilor AO, BO, CO, respectiv DO, demonstrează că $MNPQ$ este romb.

15. Se consideră $ABCD$ un romb cu $\sphericalangle ABC = 120°$. Se consideră BE bisectoarea $\sphericalangle ABD$, cu $E \in AD$, și DF bisectoarea unghiului BDC, cu $F \in BC$.
a) Demonstrează că $BEDF$ este dreptunghi.
b) Dacă $BE \cap AC = \{G\}$ și $DF \cap AC = \{H\}$, arată că $BGDH$ este romb.

16. În *Figura 22*, $ABCG$, $CDEG$ și $AGEF$ sunt romburi, unde $\sphericalangle AGE = 120°$ și $\sphericalangle GAB = 60°$.
a) Arată că $\triangle ACE$ este echilateral.
b) Demonstrează că G este centrul de greutate al triunghiului ACE.
c) Arată că G este centrul de greutate al triunghiului BDF.

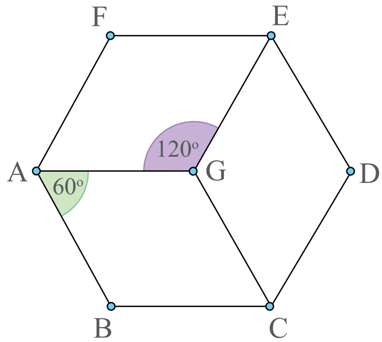


Figura 22

Paralelograme particulare: pătrat; proprietăți

Gresia folosită pentru pardoseli, faianța de pe perete au, în cele mai multe cazuri, forma unui pătrat.

Observă și descoperă!

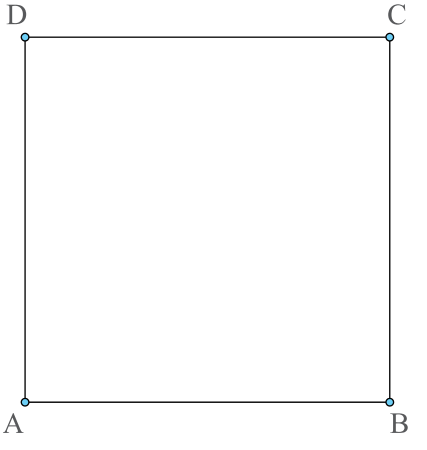
1. *Sara către Victor:* Crezi că există un patrulater convex pe care să îl pot numi și dreptunghi și romb?

Victor: Desigur!

a) Ce poți spune despre laturile unui asemenea patrulater?

b) Cum sunt unghiurile unui astfel de patrulater?

c) Desenează acest patrulater.



Important

• Numim **pătrat** patrulaterul convex care este și romb și dreptunghi.

Dacă $ABCD$ este pătrat, atunci $ABCD$ este romb și $ABCD$ este dreptunghi.

Dacă $ABCD$ este romb și $ABCD$ este dreptunghi, atunci $ABCD$ este pătrat.

• Fiind și romb și dreptunghi, un pătrat are toate proprietățile celor două figuri geometrice:

▷ Toate laturile sunt congruente.
▷ Toate unghiurile sunt drepte.
▷ Diagonalele au același mijloc.
▷ Diagonalele sunt congruente.
▷ Diagonalele sunt perpendiculare.
▷ Diagonalele sunt bisectoare pentru unghiurile pătratului.

Exersează!

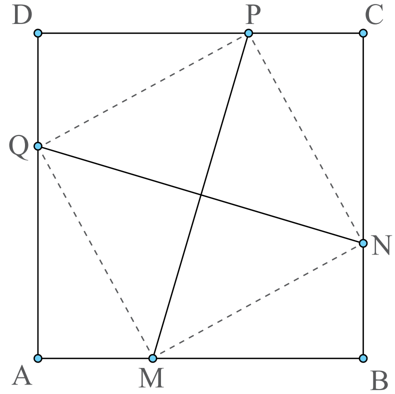


Figura 23

2. Se consideră un pătrat $ABCD$ și punctele $M \in AB$, $N \in BC$, $P \in CD$ și $Q \in DA$, astfel încât $AM \equiv BN \equiv CP \equiv DQ$, ca în *Figura 23*. Demonstrați că $MP \equiv NQ$ și $MP \perp NQ$.

Ipoteză: $ABCD$ – pătrat, $AM \equiv BN \equiv CP \equiv DQ$

Concluzie: $MP \equiv NQ$, $MP \perp NQ$

Demonstrație: Dacă demonstrăm că patrulaterul $MNPQ$ este pătrat, atunci ambele concluzii sunt adevărate, deoarece MP și NQ sunt diagonalele acestui patrulater.

Din $AB \equiv BC \equiv CD \equiv DA$ și $AM \equiv BN \equiv CP \equiv DQ$, rezultă $MB \equiv NC \equiv PD \equiv QA$ (diferență de segmente congruente). Acum, în triunghiurile dreptunghice AMQ, BNM, CPN și DQP avem $AM \equiv BN \equiv CP \equiv DQ$ (din ipoteză) și $MB \equiv NC \equiv PD \equiv QA$ (din demonstrație). Deducem, conform cazului de congruență a triunghiurilor dreptunghice CC, că $\triangle AMQ \equiv \triangle BNM \equiv \triangle CPN \equiv \triangle DQP$, de unde $MN \equiv NP \equiv PQ \equiv QM$ și atunci patrulaterul $MNPQ$ este romb (are toate laturile congruente).

Pe de altă parte, avem $\sphericalangle AMQ + \sphericalangle QMN + \sphericalangle NMB = 180°$. Cum $\triangle AMQ \equiv \triangle BNM$, implică $\sphericalangle AMQ \equiv \sphericalangle BNM$ și atunci $\sphericalangle BNM + \sphericalangle QMN + \sphericalangle NMB = 180°$. Dar $\sphericalangle BNM + \sphericalangle NMB = 90°$ (din triunghiul dreptunghic BMN) și atunci $\sphericalangle QMN = 90°$. Prin urmare, $MNPQ$ devine dreptunghi (este paralelogram și are un unghi drept). Fiind și romb și dreptunghi, rezultă că $MNPQ$ este pătrat. Atunci $MP \equiv NQ$ (diagonalele sunt congruente) și $MP \perp NQ$ (diagonalele sunt perpendiculare).

3. Stabileşte dacă propoziţiile date sunt adevărate (**A**) sau false (**F**):
a) Într-un pătrat diagonalele sunt perpendiculare;
b) Un romb cu diagonalele egale este pătrat;
c) Diagonalele pătratului au același mijloc;
d) Măsura unghiului format de o latură a pătratului cu o diagonală este egală cu 90°.

4. Se consideră $ABCD$ un dreptunghi în care $\sphericalangle CAB = 45°$. Arată că $ABCD$ este pătrat.

5. Se consideră pătratul $ABCD$, O este punctul de intersecţie a diagonalelor pătratului şi punctele M şi N mijloacele laturilor AD, respectiv AB. Arată că patrulaterul $ANOM$ este pătrat.

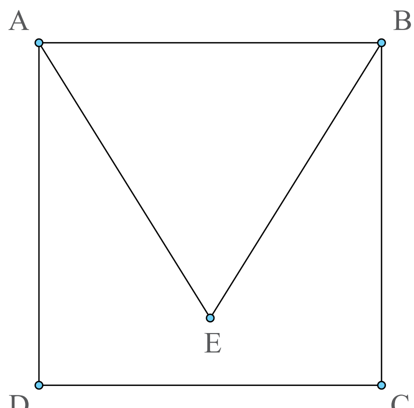


Figura 24

6. Se consideră pătratul $ABCD$ şi punctele P şi Q mijloacele laturilor AD, respectiv DC. Care este măsura unghiului format de dreptele PQ şi DB?

7. Se consideră pătratul $ABCD$, O punctul de intersecţie a diagonalelor şi M mijlocul laturii AB. Care este măsura unghiului COM?

8. În *Figura 24*, $ABCD$ este pătrat şi punctul E este situat în interiorul pătratului astfel încât triunghiul ABE este echilateral.
a) Arată că triunghiului ADE este isoscel.
b) Care este măsura unghiului ADE ?
c) Care este măsura unghiului DEC?

9. Fie pătratul $ABCD$ şi punctele M şi N mijloacele laturilor AB, respectiv BC. Arată că dreptele DN şi CM sunt perpendiculare.

10. Se consideră A, B, C și D patru puncte pe un cerc astfel încât AC și BD sunt diametre perpendiculare. Demonstrează că $ABCD$ este pătrat.

11. Se consideră $ABCD$ un patrulater convex cu următoarele proprietăți: $AB \parallel CD$, AC este bisectoarea unghiului BAD, $AD \perp AB$ și $\sphericalangle DAC = \sphericalangle ACB$. Demonstrează că $ABCD$ este pătrat.

12. Se consideră $\triangle ABC$ dreptunghic în A. Punctul M este mijlocul laturii BC și $MN \perp AB$, cu $N \in AB$ și $MP \perp AC$, cu $P \in AC$.

a) Dacă $AB = AC$, demonstrează că $ANMP$ este pătrat.

b) Dacă $ANMP$ este pătrat, demonstrează că $AB = AC$.

13. Se consideră un pătrat $ABCD$, punctul M pe latura AB și punctul N pe latura BC astfel încât $BM = BN$. Demonstrează că $\triangle DMN$ este isoscel și că $MN \parallel AC$.

14. Se consideră $\triangle ABE$ un triunghi dreptunghic isoscel, cu $AB = AE$. Dacă $BCDE$ este un pătrat, astfel încât punctele C și D nu aparțin semiplanului determinat de dreapta BE și punctul A, iar $\{F\} = BD \cap CE$, demonstrează că $ABFE$ este pătrat.

15. Se consideră $\triangle ABE$ un triunghi echilateral. Dacă $BCDE$ este un pătrat, astfel încât punctele C și D nu aparțin semiplanului determinat de dreapta BE și punctul A, atunci:

a) Calculează măsura $\sphericalangle ACB$;

b) Demonstrează că $\triangle ACD$ este isoscel;

c) Dacă $\{F\} = CE \cap AD$, arată că $AF = FC$.

16. În *Figura 25* sunt reprezentate romburile $ABCD$, $ABEF$ și $BCGE$ astfel încât $\sphericalangle FAB = \sphericalangle BAD = 45°$. Demonstrează că:

a) $BCGE$ este pătrat;

b) punctele A, B, G sunt coliniare;

c) $DCEF$ este dreptunghi.

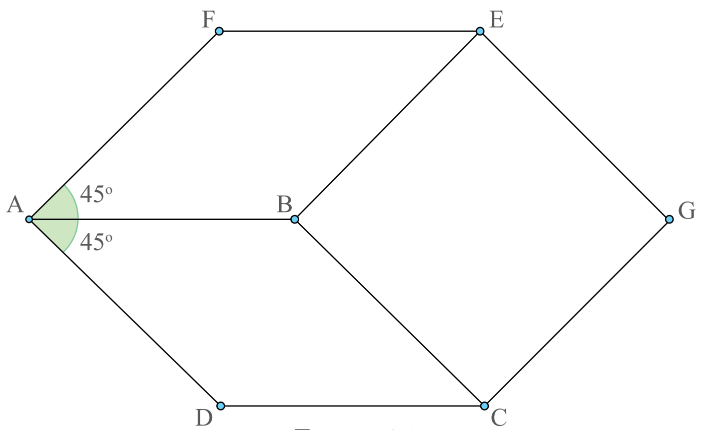
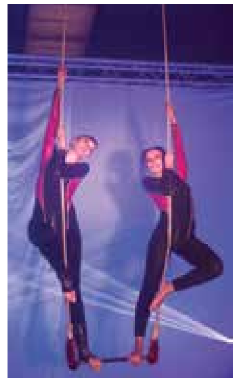


Figura 25

Trapezul, clasificare, proprietăţi. Linia mijlocie în trapez. Trapezul isoscel; proprietăţi

La circ, acrobații folosesc în exercițiile lor un aparat numit trapez.



Descoperă!

1. Desenează un patrulater convex în care două laturi sunt paralele și celelalte două sunt neparalele.

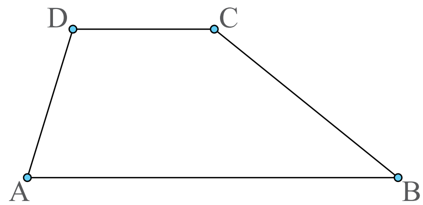
a) Dacă laturile paralele ar fi congruente, cum sunt celelalte două laturi? Justifică răspunsul dat.

b) Pot fi laturile neparalele congruente? Desenează un astfel de patrulater.

c) Poate avea un astfel de patrulater un unghi drept? Care este numărul maxim de unghiuri drepte într-un astfel de patrulater?

Important

• Numim **trapez** patrulaterul convex cu două laturi paralele și două laturi neparalele.



Dacă $ABCD$ este trapez, atunci $AB \parallel CD$ și $AD \nparallel BC$.
Dacă $AB \parallel CD$ și $AD \nparallel BC$, atunci $ABCD$ este trapez.

• Laturile paralele ale unui trapez se numesc **baze** și anume baza mare și baza mică deoarece ele nu au aceeași lungime.

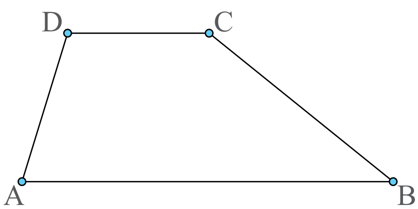
Exemplu: În figura de mai sus AB este baza mare și CD este baza mică.

• Trapezul poate fi:

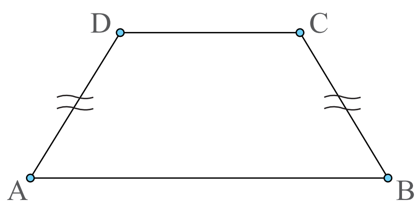
▷ **Trapez oarecare.** Laturile neparalele au lungimi diferite.

▷ **Trapez isoscel.** Laturile neparalele sunt congruente.

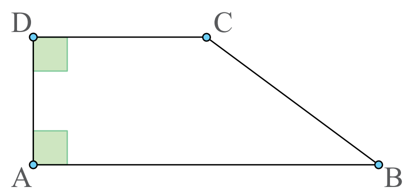
▷ **Trapez dreptunghic.** Una dintre laturile neparalele este perpendiculară pe cele două baze.



Trapez oarecare
$AD \neq BC$



Trapez isoscel
$AD \equiv BC$



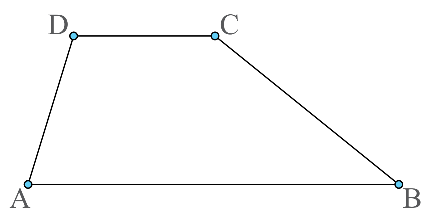
Trapez dreptunghic
$AD \perp AB$ și $AD \perp CD$

• În orice trapez unghiurile alăturate fiecăreia dintre laturile neparalele sunt suplementare.

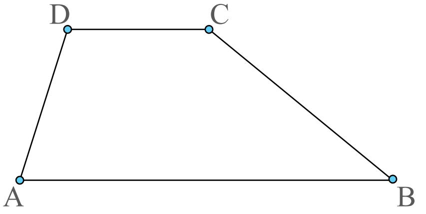
Ipoteză: $ABCD$ trapez, cu $AB \parallel CD$

Concluzie: $\sphericalangle DAB + \sphericalangle ADC = 180°$; $\sphericalangle ABC + \sphericalangle BCD = 180°$

Demonstrație: $AB \parallel CD$ (din ipoteză) și AD secantă implică $\sphericalangle DAB + \sphericalangle ADC = 180°$ (sunt unghiuri interne de aceeași parte a secantei). Analog se demonstrază că $\sphericalangle ABC + \sphericalangle BCD = 180°$ (folosim secanta BC).



• Dacă într-un patrulater convex unghiurile alăturate unei laturi sunt suplementare, atunci patrulaterul este trapez.



Ipoteză: $ABCD$ – patrulater convex; $\sphericalangle DAB + \sphericalangle ADC = 180°$
Concluzie: $ABCD$ – trapez
Demonstrație: Pentru dreptele AB și CD și secanta AD unghiurile DAB și ADC sunt unghiuri interne de aceeași parte a secantei. Cum $\sphericalangle DAB + \sphericalangle ADC = 180°$ (din ipoteză) rezultă $AB \parallel CD$, adică $ABCD$ este trapez.

Observă și descoperă!

2. Sara are de rezolvat următoarea problemă: *Se consideră trapezul $ABCD$ cu $AB \parallel CD$, punctul M mijlocul laturii AD, punctul N mijlocul laturii BC și punctul O mijlocul diagonalei BD, ca în Figura 26.*

a) Demonstrează că punctele M, O, N sunt coliniare

b) Arată că $MN = \dfrac{AB + CD}{2}$.

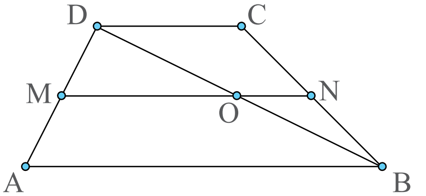


Figura 26

Ajut-o pe Sara să rezolve problema, oferind răspunsurile la următoarele întrebări:

a) Ce reprezintă MO pentru triunghiul ABD?

b) Poți afirma că $MO \parallel AB$ și $MO = \dfrac{AB}{2}$? Justifică!

c) Poți afirma că $NO \parallel CD$ și $NO = \dfrac{CD}{2}$? Justifică!

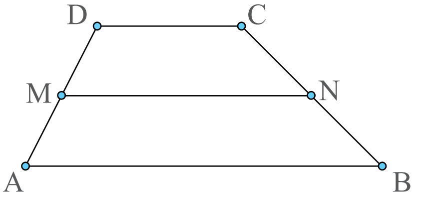
d) Poți afirma că $NO \parallel AB$? Justifică!

e) Poți construi, prin punctul O, două drepte diferite, paralele cu aceeași dreaptă ? Ce concluzie obții?

f) Scrie segmentul MN ca sumă de două segmente.

Important

• Numim **linie mijlocie** în trapez segmentul care unește mijloacele laturilor neparalele.



• Linia mijlocie în trapez este paralelă cu bazele trapezului și este egală cu jumătate din suma bazelor trapezului.

MN linie mijlocie în trapez, atunci $MN \parallel AB \parallel CD$ și $MN = \dfrac{AB + CD}{2}$.

Observă și descoperă!

3. Problemă rezolvată. Se consideră trapezul isoscel $ABCD$ cu $AB \parallel CD$ și $AD \equiv BC$.

a) Arătați că $\sphericalangle DAB \equiv \sphericalangle CBA$ și $\sphericalangle ADC \equiv \sphericalangle BCD$.

b) Demonstrați că $AC \equiv BD$.

Ipoteză: $ABCD$ – trapez; $AB \parallel CD$; $AD \equiv BC$

Concluzie: a) $\sphericalangle DAB \equiv \sphericalangle CBA$; $\sphericalangle ADC \equiv \sphericalangle BCD$

b) $AC \equiv BD$

Demonstrație:

a) (folosim *Figura 27*) Construim $CE \parallel AD$, $E \in AB$. Din $CE \parallel AD$ și $AB \parallel CD$, rezultă $AECD$ este paralelogram și, deci, $CE \equiv AD$. Cum $AD \equiv BC$ (din ipoteză), rezultă $CE \equiv BC$, adică triunghiul CEB este isoscel, de unde $\sphericalangle CEB \equiv \sphericalangle CBE$. Dar $\sphericalangle CEB \equiv \sphericalangle DAB$ (sunt unghiuri corespondente pentru dreptele paralele AD și CE și secanta AB). În concluzie, $\sphericalangle DAB \equiv \sphericalangle CBA$.

Acum, $\sphericalangle ADC + \sphericalangle DAB = 180°$ și $\sphericalangle DCB + \sphericalangle CBA = 180°$. Cum $\sphericalangle DAB \equiv \sphericalangle CBA$, rezultă $\sphericalangle ADC \equiv \sphericalangle BCD$.

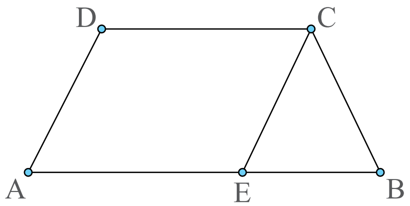


Figura 27

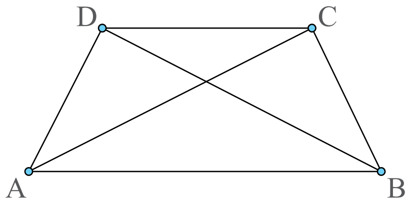


Figura 28

b) În triunghiurile ADB și BCA (*Figura 28*) avem $AB \equiv AB$ (latură comună); $AD \equiv BC$ (din ipoteză) și $\sphericalangle DAB \equiv \sphericalangle CBA$ (din demonstrația anterioară). Rezultă, conform cazului LUL de congruență a triunghiurilor, că $\triangle DAB \equiv \triangle CBA$, de unde $AC \equiv BD$.

Important

- În orice trapez isoscel unghiurile alăturate fiecărei baze sunt congruente.

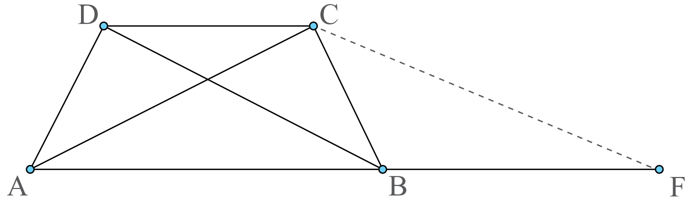
- În orice trapez isoscel diagonalele sunt congruente.

- Dacă într-un trapez unghiurile alăturate unei baze sunt congruente, atunci trapezul este isoscel.

Justificare (folosim *Figura 27*): Construim $CE \parallel AD$, $E \in AB$. Atunci $\sphericalangle CEB \equiv \sphericalangle DAB$ (sunt unghiuri corespondente pentru dreptele paralele AD și CE și secanta AB). Cum $\sphericalangle DAB \equiv \sphericalangle CBA$ (din ipoteză) rezultă $\sphericalangle CEB \equiv \sphericalangle CBE$, adică triunghiul CEB este isoscel, de unde $CE \equiv BC$. Dar $CE \equiv AD$ ($AECD$ este paralelogram) și atunci $AD \equiv BC$, adică trapezul este isoscel.

- Dacă într-un trapez diagonalele sunt congruente, atunci trapezul este isoscel.

Justificare: Construim $CF \parallel DB$, $F \in AB$. De aici și din $CD \parallel AB$ rezultă că $DBFC$ este paralelogram și deci $CF \equiv DB$. Cum $DB \equiv AC$ (din ipoteză) rezultă $CF \equiv AC$, adică triunghiul ACF este isoscel. Prin urmare $\sphericalangle CAF \equiv \sphericalangle CFA$. Dar $\sphericalangle DBA \equiv \sphericalangle CFA$ (unghiuri corespondente pentru dreptele paralele BD și CF și secanta AF). Rezultă $\sphericalangle DBA \equiv \sphericalangle CAB$. Acum, $\triangle ADB \equiv \triangle BCA$ deoarece AB este latură comună; $DB \equiv AC$ (din ipoteză) și $\sphericalangle DBA \equiv \sphericalangle CAB$ (din demonstrație). Rezultă $AD \equiv BC$, adică trapezul este isoscel.



Exersează!

4. Pentru fiecare trapez (*Figurile 29 – 32*), scrie bazele şi determină măsurile unghiurilor necunoscute:

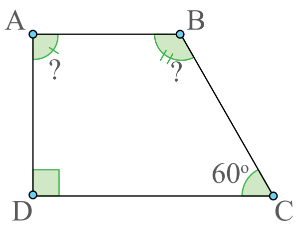


Figura 29

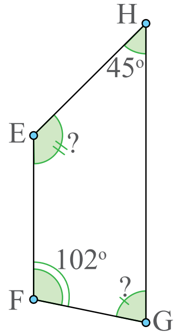


Figura 30

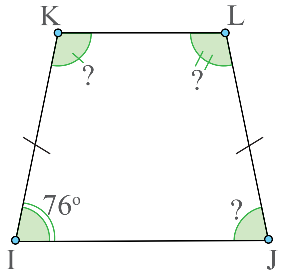


Figura 31

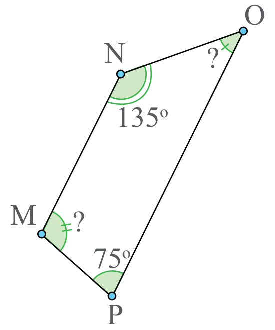


Figura 32

5. Alege varianta corectă dintre cele 4 variante date și realizează desenul corespunzător acesteia:

I. Trapezul $ABCD$ cu $AB \parallel CD$ este isoscel și:

a) $AB = CD$ b) $AD > BC$ c) $AB = AD$ d) $AB = BD = BC$

II. Trapezul $MNPQ$ cu $MN \parallel PQ$ este dreptunghic și:

a) $\sphericalangle M = \sphericalangle N = 90°$ b) $\sphericalangle M = \sphericalangle P = 90°$ c) $\sphericalangle P = \sphericalangle Q = 90°$ d) $\sphericalangle Q = \sphericalangle M = 90°$

III. În trapezul oarecare $PRST$ cu baza mare ST are loc relaţia:

a) $ST \parallel SR$ b) $PT \parallel RS$ c) $PR \parallel ST$ d) $PS \parallel RT$

IV. Trapezul $ABCD$ cu $\sphericalangle B = 65°$ $AB \parallel CD$ şi $AD \neq BC$ are:

a) $\sphericalangle A = 115°$ b) $\sphericalangle C = 115°$ c) $\sphericalangle C = 65°$ d) $\sphericalangle D = 115°$

6. În triunghiul ABC, cu $AB \neq AC$ se consideră punctele M, N şi P mijloacele laturilor AB, AC, respectiv BC. Arată că patrulaterul $MNPD$ este trapez isoscel, unde D este piciorul înălțimii din A a triunghiului ABC.

7. Determină unghiurile necunoscute ale trapezului $ABCD$, cu $AB \parallel CD$, dacă:

a) $\sphericalangle A = 45°$, $\sphericalangle B = 65°$;

b) $\sphericalangle B = 60°$, $\sphericalangle D = 110°$;

c) $\sphericalangle A = 100°$, $\sphericalangle C = 62°$.

8. Determină unghiurile necunoscute ale trapezului $ABCD$, cu $AD = BC$, în fiecare caz:
a) $\sphericalangle A = 105°$; b) $\sphericalangle B = 40°$; c) $\sphericalangle C = 70°$; d) $\sphericalangle D = 68°$.

9. Se consideră trapezul isoscel $ABCD$ cu $AB \parallel CD$.
a) Arată că triunghiurile CABşi DBA sunt congruente.
b) Demonstrează că triunghiul OAB este isoscel.

10. Se consideră trapezul isoscel $ABCD$ cu $AB \parallel CD$, $AB > CD$. Se consideră E şi F, picioarele înălțimilor din D, respectiv C pe latura AB. Arată că $AE \equiv BF$.

11. Se consideră $\triangle ABC$ un triunghi isoscel. Pe laturile AB și AC ale triunghiului considerăm punctele M și N, astfel încât $MN \parallel BC$. Demonstrează că $BCNM$ este un trapez isoscel și arată că $BN = CM$.

12. Se consideră $ABCD$ un trapez isoscel, cu $AB \parallel CD$ și $AB > CD$. Dacă punctul V este intersecția dreptelor AD și BC, demonstrează că triunghiurile VAB și VCD sunt isoscele.

13. Se consideră $MNPQ$ un trapez isoscel, cu $MN \parallel PQ$ și $MN > PQ$. Dacă punctul T este intersecția diagonalelor, arată că triunghiurile TMN și TPQ sunt isoscele.

14. În triunghiul ABC, dreptunghic în A, considerăm M mijlocul laturii BC, după care construim $MN \perp AB$, $N \in AB$, și $MP \perp AC$, $P \in AC$. Demonstrează că $NBCP$ este trapez și arată, apoi, că, dacă acesta este un trapez isoscel, atunci triunghiul ABC este isoscel.

15. În *Figura 33*, $ABCD$ este un trapez dreptunghic în care $AC \perp BC$ și $\sphericalangle ABC = 45°$. Știind că $CE \perp AB$, cu $E \in AB$:

a) Arată că $AECD$ este pătrat.

b) Demonstrează că $EBCD$ este paralelogram.

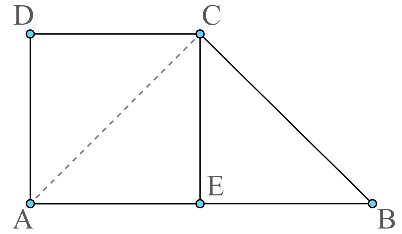


Figura 33

16. David trebuie să realizeze o ramă din lemn de forma unui pătrat $ABCD$, ca în *Figura 34*. El construiește mai întâi patru trapeze isoscele: $ABNM$, $BCPN$, $CDQP$ și $DAMQ$ în care unghiurile ascuțite au 45° fiecare și AB, BC, CD, respectiv DA sunt baze mari. Demonstrează că patrulaterul $MNPQ$ este pătrat.

Din păcate, David observă că dacă ar folosi ramele anterioare, ar acoperi anumite părți importante ale tabloului și decide să micșoreze ramele, construind punctele W, X, Y și Z drept mijloacele segmentelor AM, BN, CP și DQ și efectuând patru tăieturi, de-a lungul segmentelor WX, XY, YZ și WZ. Demonstrează că și noua figură rămasă (patrulaterul $WXYZ$) este tot un pătrat.

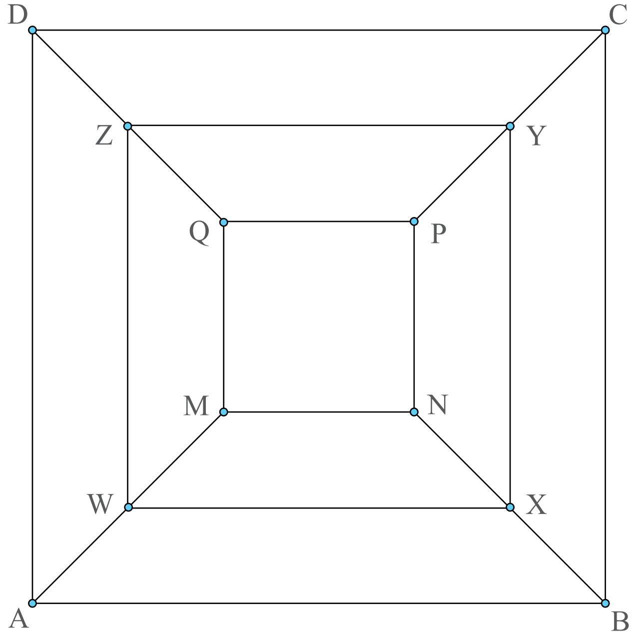


Figura 34

Perimetre și arii: paralelogram, paralelograme particulare, triunghi, trapez

Dacă dorim să montăm faianță în bucătărie, avem de calculat arii.

Dacă dorim să construim un gard, avem de calculat un perimetru.

Observă și descoperă!

1. Sara vrea să determine câte pătrățele sunt în interiorul dreptunghiului $ABCD$.

a) Ajut-o pe Sara să determine cât mai simplu numărul pătrățelelor, explicând modul în care ai procedat.

b) Câte pătrate, de mărimea pătratului roșu, sunt necesare pentru a acoperi suprafața dreptunghiului $ABCD$ din *Figura 35*?

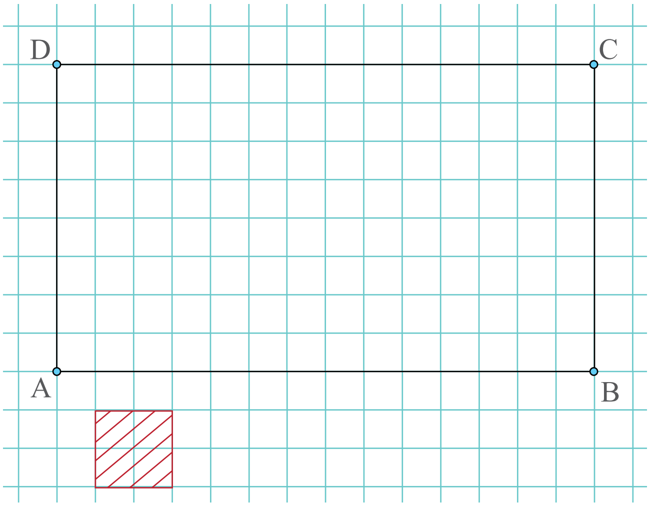


Figura 35

Important

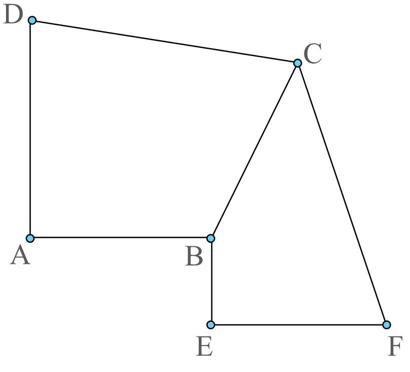
• **Aria** este un număr real pozitiv care se asociază unei suprafețe și ne arată de câte ori o suprafață aleasă de noi (numită unitate de arie) se cuprinde în suprafața dată.

Exemplu: În cazul de mai sus, dacă unitatea de arie este „pătrățica”, spunem că aria dreptunghiului $ABCD$ este de 112 pătrățele. Dacă unitatea de arie este „pătratul roșu”, spunem că aria dreptunghiului este de 28 de pătrate roșii.

• În sistemul internațional de unități de măsură, unitatea principală pentru măsurarea ariei este **metrul pătrat** (m^2).

• Dacă două figuri geometrice au o latură comună și interioarele lor nu au puncte comune, atunci aria suprafeței delimitate de cele două figuri este suma ariilor celor două figuri.

Exemplu: $\mathcal{A}_{ABEFCD} = \mathcal{A}_{ABCD} + \mathcal{A}_{BEFC}$.



• Aria unui dreptunghi se poate determina cu ajutorul formulei $\mathcal{A}_{\text{dreptunghi}} = L \cdot l$, unde L reprezintă lungimea laturii mai mari a dreptunghiului, iar l lungimea laturii mai mici a dreptunghiului.

Exemplu: Aria dreptunghiului cu lungimea $L = 6$ cm și lățimea $l = 4$ cm este $\mathcal{A} = 6 \cdot 4 \Rightarrow \mathcal{A} = 24\ cm^2$.

• Aria unui pătrat se poate determina cu ajutorul formulei $\mathcal{A}_{\text{pătrat}} = l^2$, unde l reprezintă lungimea laturii pătratului (pătratul este dreptunghiul cu laturile congruente).

Exemplu: Aria unui pătrat cu latura de 5 cm este $\mathcal{A} = 5^2 = 25\ cm^2$.

Observă și descoperă!

2. Victor își propune să găsească o formulă pentru a calcula aria unui triunghi dreptunghic, folosindu-se de *Figura 36*. Ajută-l pe Victor, răspunzând la întrebările care urmează.

a) Sunt congruente triunghiurile ABD și CDB? Justifică!

b) Cum sunt ariile celor două triunghiuri?

c) Justifică formula $\mathcal{A}_{\triangle ABD} = \dfrac{AB \cdot AD}{2}$.

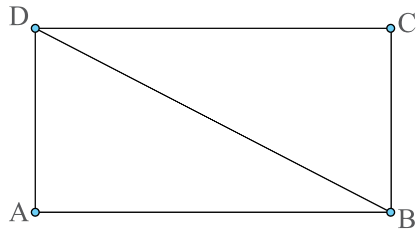


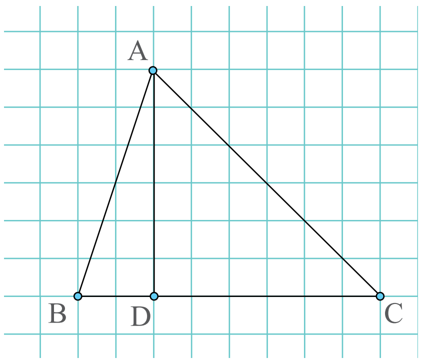
Figura 36

Important

• Aria unui triunghi dreptunghic se poate determina cu formula $\mathcal{A}_{\text{tr. dreptunghic}} = \dfrac{c_1 \cdot c_2}{2}$, unde c_1 și c_2 sunt lungimile catetelor.

Exemplu: Aria unui triunghi dreptunghic având catetele de 6 cm, respectiv 8 cm, este $\mathcal{A} = \dfrac{6 \cdot 8}{2} = 24\ cm^2$.

• Aria unui triunghi oarecare se poate determina cu formula $\mathcal{A}_{\text{triunghi}} = \dfrac{l \cdot h}{2}$, unde l este lungimea unei laturi și h este lungimea înălțimii corespunzătoare acelei laturi.



Exemplu: Aria unui triunghi cu o latură de 6 cm și înălțimea corespunzătoare de 4 cm este $\mathcal{A} = \dfrac{6 \cdot 4}{2} = 12\ cm^2$.

Justificare: $\mathcal{A}_{ABC} = \mathcal{A}_{ABD} + \mathcal{A}_{ACD}$; $\mathcal{A}_{ABD} = \dfrac{AD \cdot BD}{2}$; $\mathcal{A}_{ACD} = \dfrac{AD \cdot CD}{2}$.

Atunci $\mathcal{A}_{ABC} = \dfrac{AD \cdot BD}{2} + \dfrac{AD \cdot CD}{2} = \dfrac{AD \cdot BD + AD \cdot CD}{2} = \dfrac{AD \cdot (BD + DC)}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \mathcal{A}_{ABC} = \dfrac{AD \cdot BC}{2}$.

Observă și descoperă!

3. Pentru a determina aria unui paralelogram $ABCD$, Sara construiește diagonala BD (*Figura 37*). Ajut-o pe Sara, răspunzând la următoarele întrebări:

a) Sunt congruente triunghiurile ABD și CDB? Justifică!

b) Cum sunt ariile celor două triunghiuri?

c) Justifică formula $\mathcal{A}_{ABCD} = AB \cdot DE$.

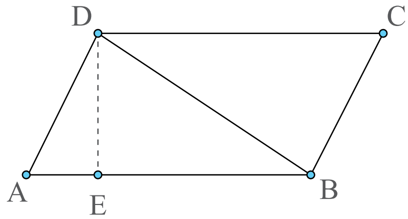


Figura 37

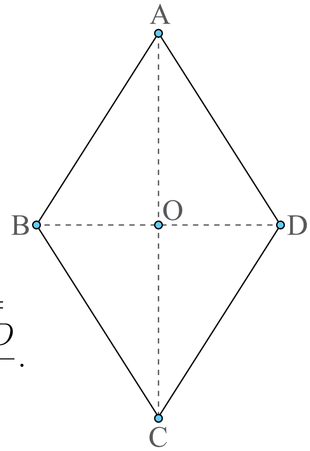
Important

• Numim **înălțime a paralelogramului** distanța dintre două laturi paralele.

• Aria unui paralelogram se poate determina cu formula $\mathcal{A}_{\text{paralelogram}} = l \cdot h$, unde l reprezintă lungimea laturii și h lungimea înălțimii corespunzătoare.

Exemplu: Aria unui paralelogram cu o latură de 6 cm și înălțimea corespunzătoare de 8 cm este $\mathcal{A} = 6 \cdot 8 = 48\ cm^2$.

• Aria unui romb se poate determina cu formula $\mathcal{A}_{\text{romb}} = \dfrac{d \cdot D}{2}$, unde d și D reprezintă lungimile diagonalelor.



Exemplu: Aria unui romb cu diagonalele de 6 cm, respectiv 8 cm, este $\mathcal{A} = \dfrac{6 \cdot 8}{2} = 24\ cm^2$.

Justificare: $\triangle ABD \equiv \triangle CBD$ deoarece BD este latură comună, $AB \equiv BC$ și $AD \equiv CD$ (laturi ale rombului). Atunci $\mathcal{A}_{\text{romb}} = 2 \cdot \mathcal{A}_{ABD} = 2 \cdot \dfrac{BD \cdot AO}{2} = BD \cdot AO$. Cum $AO = \dfrac{AC}{2}$, deducem că $\mathcal{A}_{\text{romb}} = \dfrac{AC \cdot BD}{2}$.

• Aria unui romb se poate determina folosind formula pentru aria paralelogramului.

• Numim **înălțime a trapezului** distanța dintre cele două baze.

• Aria unui trapez se poate determina cu formula $\mathcal{A}_{\text{trapez}} = \dfrac{(B+b) \cdot h}{2}$, unde B reprezintă lungimea bazei mari, b lungimea bazei mici și h reprezintă înălțimea trapezului.

Exemplu: Aria unui trapez cu bazele de 6 cm, respectiv 8 cm, și înălțimea de 3 cm este $\mathcal{A} = \dfrac{3 \cdot (8+6)}{2} = 21\ cm^2$.

• **Perimetrul unui patrulater convex sau triunghi** înseamnă suma lungimilor tuturor laturilor.

• Pentru **paralelogram**, perimetrul se poate determina cu formula $\mathcal{P} = 2 \cdot (L + l)$, unde L reprezintă lungimea laturii mai mari, iar l reprezintă lungimea laturii mai mici.

Exemplu: Perimetrul unui paralelogram cu lungimea unei laturi de 8 cm și lungimea altei laturi de 6 cm este $\mathcal{P} = 2 \cdot (8+6) = 28\ cm$.

• Pentru **romb**, perimetrul se poate determina cu formula $\mathcal{P} = 4 \cdot l$, unde l reprezintă lungimea laturii.

Exemplu: Perimetrul unui romb cu lungimea unei laturi de 8 cm este $\mathcal{P} = 4 \cdot 8 = 32\ cm$.

Exersează!

4. Calculează aria dreptunghiului $ABCD$, dacă se cunosc următoarele lungimi de laturi:
a) $AB = 8\ cm$ și $BC = 5$ cm; b) $CD = 3$ cm și $CB = 7$ cm; c) $AD = 9$ cm și $AB = 6$ cm.

5. Calculează perimetrul dreptunghiului $ABCD$ în fiecare caz: a) $\mathcal{A}_{ABCD} = 48\ cm^2$, $AB = 6\ cm$; b) $\mathcal{A}_{ABCD} = 72\ cm^2$, $BC = 8\ cm$; c) $\mathcal{A}_{ABCD} = 378\ cm^2$, $AB = 18\ cm$.

6. Se consideră triunghiul dreptunghic ABC cu $\sphericalangle A = 90°$, $AB = 3\ cm$ și $\mathcal{A}_{ABC} = 6\ cm^2$. Calculează: a) lungimea laturii AC; b) perimetrul triunghiului ABC; c) lungimea înălțimii din vârful A.

Indicație: b) Amintește-ți *Teorema lui Pitagora*, studiată în clasa a VI-a; c) Scrie aria triunghiului ABC în două moduri.

7. Calculează aria paralelogramului, în fiecare caz (*Figurile 38-40*).

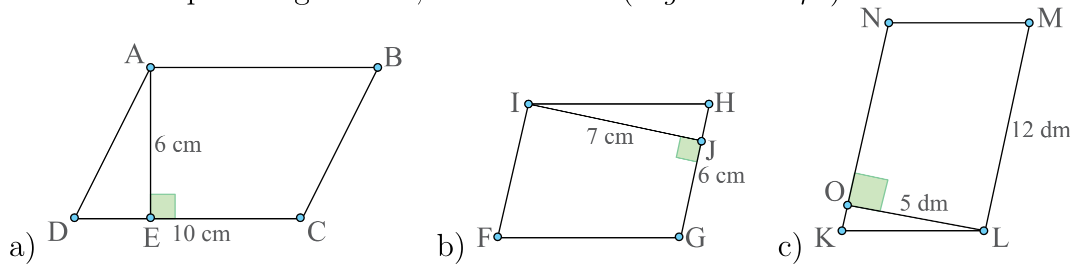


Figura 38 *Figura 39* *Figura 40*

8. Calculează aria unui romb $ABCD$, cunoscând lungimile diagonalelor:
a) $AC = 6$ cm, $BD = 8$ cm; b) $AC = 5$ m, $BD = 12$ m; c) $AC = 16$ dam, $BD = 12$ dam.

9. Calculează aria și perimetrul unui pătrat cu lungimea laturii egală cu: a) 6 cm; b) 5 dm; c) 9 m.

10. Calculează aria unui pătrat cu perimetrul egal cu: a) 20 cm; b) 12 dm; c) 10 m.

11. Calculează perimetrul unui pătrat cu aria egală cu: a) 36 cm^2; b) 25 dm^2; c) 100 m^2.

12. Calculează aria fiecărui trapez, folosind informaţiile din *Figurile 41-43*.

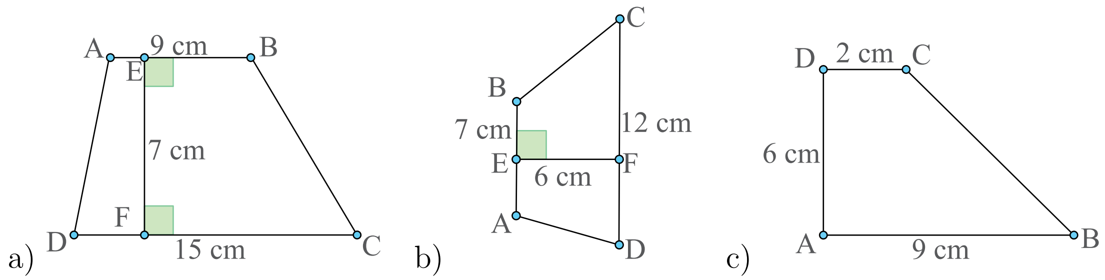


Figura 41 *Figura 42* *Figura 43*

13. Calculează aria unui trapez a cărui înălțime are lungimea de 9 *cm* și linia mijlocie egală cu 8 *cm*.

14. Se consideră ΔABC un triunghi oarecare și AM mediană, cu $M \in BC$. Demonstrează că $\mathcal{A}_{ABM} = \mathcal{A}_{ACM} = \frac{1}{2}\mathcal{A}_{ABC}$.

15. Se consideră $ABCD$ un trapez isoscel, cu $AB \parallel CD$, $AB > CD$ și punctul O intersecția diagonalelor.

a) Demonstrează că $\mathcal{A}_{AOD} = \mathcal{A}_{BOC}$.

b) Dacă $OP \perp AD$, $P \in AD$, și $OR \perp BC$, $R \in BC$, demonstrează că triunghiul OPR este isoscel.

16. Se consideră $ABCD$ un trapez oarecare cu $AB \parallel CD$. Arată că $\mathcal{A}_{ABD} = \mathcal{A}_{ABC}$.

17. Fie $ABCD$ un paralelogram. Demonstrează că $\mathcal{A}_{AOB} = \mathcal{A}_{BOC} = \mathcal{A}_{COD} = \mathcal{A}_{DOA} = \frac{1}{2}\mathcal{A}_{ABC} = \frac{1}{4}\mathcal{A}_{ABCD}$.

18. Se consideră $ABCD$ un trapez, cu $AB \parallel CD$, în care $\mathcal{A}_{AOD} = \mathcal{A}_{AOB} = \mathcal{A}_{BOC}$, unde $\{O\} = AC \cap BD$. Demonstrează că, în acest caz, $ABCD$ este paralelogram.

19. Se consideră $ABCD$ un dreptunghi și $E \in CD$. Dacă $AB = 5 \cdot DE$, arată că $\mathcal{A}_{ABCE} = 9 \cdot \mathcal{A}_{ADE}$.

20. Determină lungimea laturii unui pătrat, știind că aria și perimetrul acestui pătrat se exprimă prin același număr real.

Recapitulare

1. Determină măsura celui de-al patrulea unghi al patrulaterului $MNPQ$, în fiecare caz: a) $\sphericalangle M = 40°$, $\sphericalangle N = 100°$, $\sphericalangle P = 80°$; b) $\sphericalangle N = 55°$, $\sphericalangle M = 72°$, $\sphericalangle Q = 140°$.

2. Determină măsurile unghiurilor paralelogramului $ABCD$, dacă măsura unghiului B este $130°$.

3. Determină măsurile unghiurilor paralelogramului $ABCD$ în care măsura unghiului A este de două ori mai mare decât a unghiului B.

4. Se consideră $ABCD$ un paralelogram și punctele M și N mijloacele laturilor AD, respectiv BC. Arată că segmentele BM și DN sunt egale.

5. Se consideră triunghiul echilateral ABC și M, N, P mijloacele laturilor AB, BC, respectiv CA.

a) Care este natura patrulaterului $AMNP$?

b) Dacă perimetrul triunghiului este 18 cm, cât este perimetrul patrulaterului $AMNP$?

6. Dacă într-un patrulater convex măsurile unghiurilor sunt invers proporționale cu numerele 6, 8, 12 și 24, determină măsurile unghiurilor patrulaterului.

7. Se consideră paralelogramul $ABCD$ și M mijlocul segmentului AD. Dreptele CM și AB se intersectează în punctul T. Care este natura patrulaterului $TACD$?

8. În *Figurile 44-46* sunt reprezentate schițele grădinilor lui Marian, Radu și Dan. Știind că toate pătratele din imagini reprezintă, în realitate, un pătrat cu latura de 3 m, determină aria fiecărei grădini.

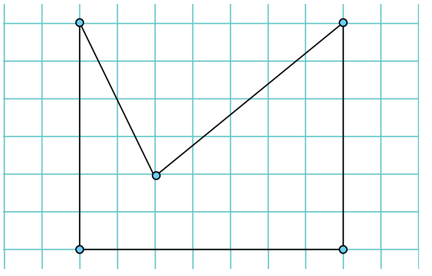


Figura 44
Schița grădinii lui Marian

9. Determină aria unui pătrat care are perimetrul egal cu al unui dreptunghi cu dimensiunile de 12 cm, respectiv 20 cm.

10. Demonstrează că, dacă un patrulater convex are trei unghiuri drepte, atunci acesta este dreptunghi.

11. Se consideră $ABCD$ un paralelogram, astfel încât $AB \equiv BD$. Dacă $CE \parallel BD$, cu $E \in AB$, arată că $DE \perp BC$.

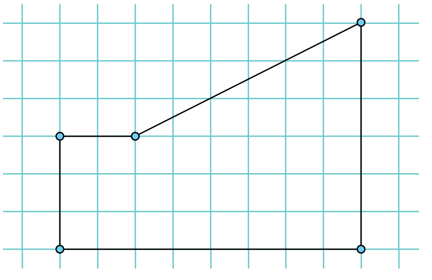


Figura 45
Schița grădinii lui Radu

12. Se consideră O punctul de intersecție a diagonalelor dreptunghiului $ABCD$. Dacă $\mathcal{P}_{ABC} = 48$ cm, $\mathcal{P}_{ABO} = 36$ cm, iar $\mathcal{P}_{BOC} = 32$ cm, determină lungimile segmentelor BC, AB și BD.

13. Se consideră ABE un triunghi dreptunghic isoscel. Pe cateta BE se construiește pătratul $BCDE$, astfel încât punctele C și D nu aparțin semiplanului determinat de dreapta BE și punctul A. Dacă $BD \cap CE = \{F\}$, demonstrează că $ABFE$ este trapez.

14. Se consideră triunghiul ABC, M mijlocul laturii AB, N mijlocul laturii AC și P mijlocul laturii BC. Demonstrează că $\mathcal{A}_{AMN} = \mathcal{A}_{BMP} = \mathcal{A}_{CNP} = \mathcal{A}_{MNP} = \dfrac{1}{4}\mathcal{A}_{ABC}$.

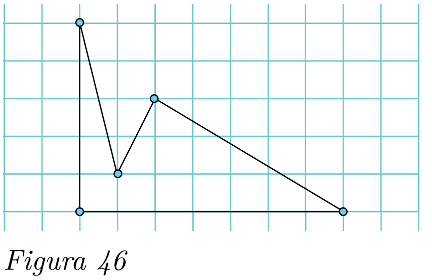


Figura 46
Schița grădinii lui Dan

15. Se consideră triunghiul ABC și mediana AM, $M \in BC$. Dacă G este centrul de greutate al triunghiului ABC, se cere:

a) arată că ariile triunghiurilor BGM și CGM sunt egale;

b) demonstrează că $\mathcal{A}_{AGB} = \mathcal{A}_{AGC} = \mathcal{A}_{BGC} = \dfrac{1}{3}\mathcal{A}_{ABC}$.