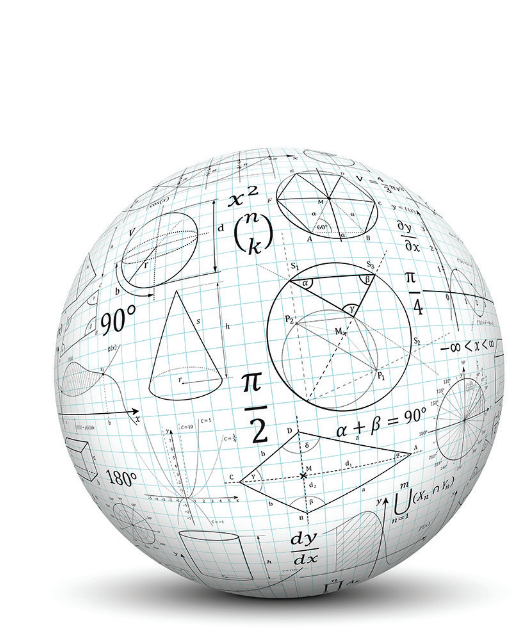


Matematică – Manual pentru clasa a VIII-a

VIII

Elemente ale geometriei în spațiu. Noțiuni introductive. Corpuri geometrice

1. Puncte, drepte, plane: convenții de notare, reprezentări, determinarea dreptei, determinarea planului, relații între puncte, drepte, plane

Amintește-ți!

1. Observă imaginea din *Figura 1* și alege răspunsul corect la fiecare dintre întrebările următoare:

a) Punctul ni-l imaginăm ca:

A. un fir de ață bine întins; B. urma lăsată pe tablă de un marker; C. tabla care se extinde la nesfârșit în toate direcțiile; D. tot ceea ce ne înconjoară.

b) Dreapta ne-o imaginăm ca:

A. un fir de ață bine întins; B. urma lăsată pe tablă de un marker; C. tabla care se extinde la nesfârșit în toate direcțiile; D. tot ceea ce ne înconjoară.

c) Planul ni-l imaginăm ca:

A. un fir de ață bine întins; B. urma lăsată pe tablă de un marker; C. tabla care se extinde la nesfârșit în toate direcțiile; D. tot ceea ce ne înconjoară.

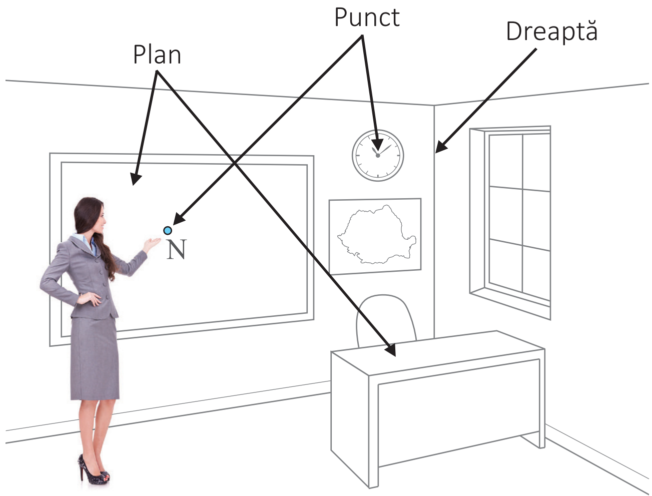


Figura 1

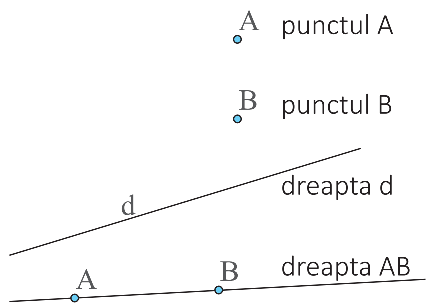
Important

• **Punctul** ni-l imaginăm ca fiind urma lăsată pe tablă de un marker. Punctul nu are dimensiune, are numai poziție.

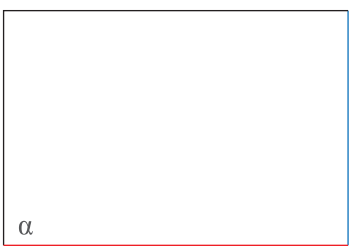
• **Dreapta** ne-o imaginăm ca fiind un fir de ață bine întins, fără capete. Dreapta are o singură dimensiune (1D).

• **Axioma dreptei:** Prin orice două puncte distincte trece o dreaptă și numai una. Pe orice dreaptă există cel puțin două puncte distincte.

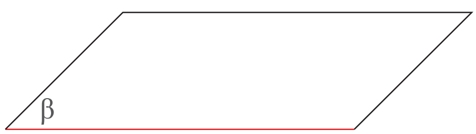
• **Planul** ni-l imaginăm ca fiind tabla care se extinde la nesfârșit în toate direcțiile. Planul are două dimensiuni (2D).



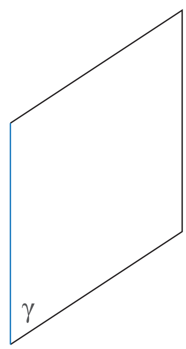
Axiomă: Este o afirmație pe care o considerăm adevărată fără a o justifica.



planul alfa
Așa desenez planul imaginat de tablă.



planul beta
Așa desenez planul imaginat de catedră.



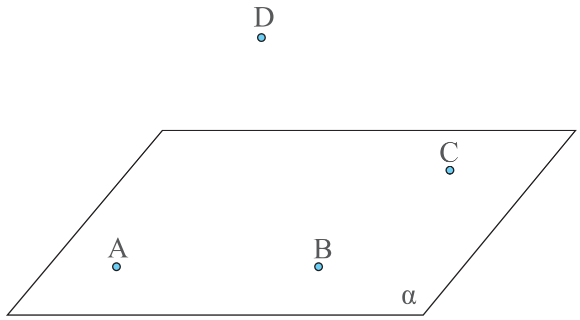
planul gama
Așa desenez planul imaginat de peretele lateral.

• **Axioma planului:** Prin orice trei puncte necoliniare trece un plan și numai unul. În orice plan există cel puțin trei puncte necoliniare.

$\alpha = (ABC)$
(ABC) citesc „planul ABC"

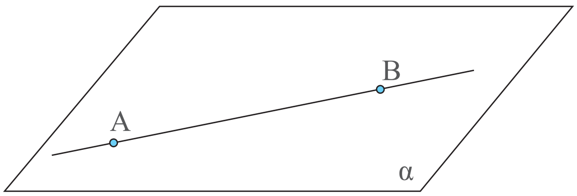
• **Spațiul** este tot ce ne înconjoară. Spațiul are trei dimensiuni (3D).

• **Axioma spațiului:** Există patru puncte care nu sunt situate în același plan (puncte necoplanare).



• **Alte axiome ale geometriei în spațiu:**

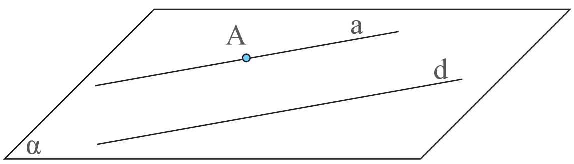
▷ **Axioma includerii:** Dacă două puncte aparțin unui plan, atunci dreapta determinată de ele este inclusă în plan.



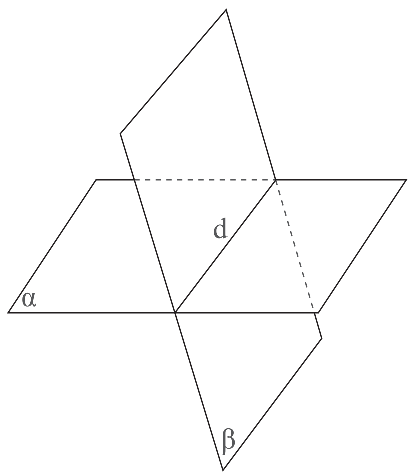
$A, B \in \alpha \Rightarrow AB \subset \alpha$

Planul este o mulțime de puncte, deci punctele aparțin planului.
Dreapta este o mulțime de puncte, deci submulțime a planului; dreapta este inclusă în plan.

▷ **Axioma paralelelor sau Postulatul lui Euclid:** Prin orice punct exterior unei drepte se poate construi o paralelă și numai una la acea dreaptă.



▷ **Axioma intersecției:** Dacă două plane distincte au un punct comun, atunci planele au în comun o dreaptă. (Dacă două plane distincte se intersectează, atunci intersecția lor este o dreaptă.)



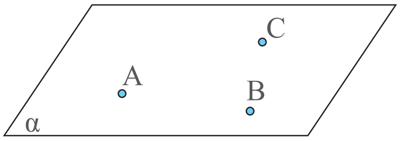
$\alpha \cap \beta = d$

Exemplu: În Figura 1, muchia dintre tavan și peretele cu tabla este dreapta de intersecție a celor două plane.

• A determina un plan înseamnă a preciza numărul minim de elemente (puncte, drepte) necesar pentru a ști cu exactitate unde se află un plan într-o configurație.

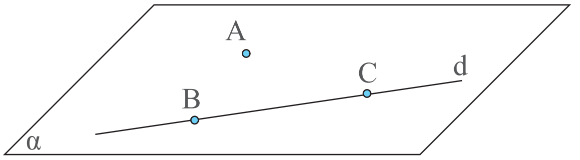
▷ **Trei puncte necoliniare determină un plan** (conform axiomei planului).

Scriu: $\alpha = (ABC)$. Citesc: planul α este planul determinat de punctele A, B, C.



▷ **O dreaptă și un punct exterior determină un plan.**

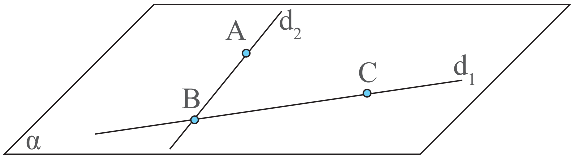
Justificare: Punctele B și C din planul α determină dreapta d (axioma dreptei) care este inclusă în planul α (axioma includerii). Deci putem înlocui punctele B și C cu dreapta d.



Scriu $\alpha = (d,A)$. Citesc: planul α este planul determinat de dreapta d și punctul A.

▷ **Două drepte concurente determină un plan.**

Justificare: Dreapta d_1 este determinată de punctele distincte B și C (axioma dreptei). Punctele B și C aparțin planului α, deci dreapta determinată de ele este inclusă în planul α (axioma includerii). Dreapta d_2 este determinată de punctele distincte A și B (axioma dreptei).

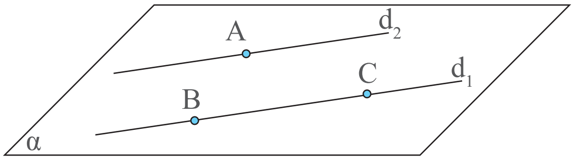


Punctele A și B aparțin planului α, deci dreapta determinată de ele este inclusă în planul α (axioma includerii). Putem, așadar, înlocui punctele A, B și C cu dreptele concurente d_1 și d_2.

Scriu: $\alpha = (d_1,d_2)$. Citesc: planul α este planul determinat de dreptele d unu și d doi.

▷ **Două drepte paralele determină un plan.**

Justificare: Dreapta d_1 este determinată de punctele distincte B și C (axioma dreptei). Punctele B și C aparțin planului α, deci dreapta determinată de ele este inclusă în planul α (axioma includerii).



Conform axiomei paralelelor, prin punctul A pot construi o paralelă și numai una la dreapta d_1. Fie aceasta d_2.

Scriu: $\alpha = (d_1,d_2)$. Citesc: planul α este planul determinat de dreptele d unu și d doi.

Exersează!

2. Folosind *Figura 2* numește trei drepte și trei plane.

3. Identifică, în jurul tău, câte două exemple de drepte și două exemple de plane.

4. Identifică, în jurul tău, patru puncte necoplanare.

5. Scrie toate dreptele determinate de patru puncte A, B, C și D, oricare trei necoliniare.

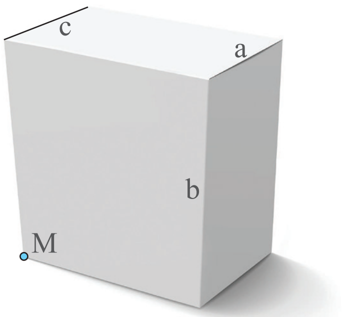


Figura 2

6. Se consideră planul α și dreptele d_1 și d_2, ca în *Figura 3*. Știm că dreptele d_1 și d_2 se intersectează în O, dreapta d_2 este inclusă în planul α, iar punctul A aparține și dreptei d_1 și planului α.

Justifică de ce dreapta d_1 este inclusă în planul α.

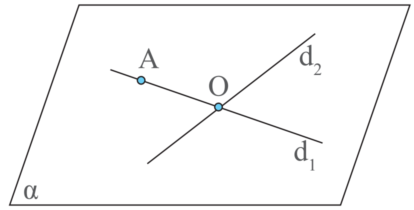


Figura 3

7. Scrie toate planele determinate de patru puncte necoplanare A, B, C și D.

8. Folosind *Figura 4* stabilește care dintre afirmațiile următoare sunt adevărate și care sunt false.

a) $A \in \alpha$; b) $D \notin \alpha$; c) $C \in \alpha$; d) $(BAC) \neq \alpha$; e) $(ABD) = \alpha$; f) $AD \subset \alpha$; g) $BC \subset \alpha$.

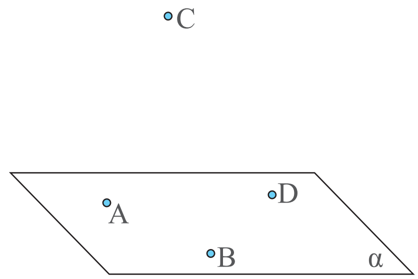


Figura 4

9. În *Figura 5* avem $d, e \subset \alpha$; $f, g \subset \beta$; $d \cap e = \{A\}$; $d \cap g = \{B\}$; $e \cap f = \{C\}$ și $f \cap g = \{D\}$.

a) Determină $\alpha \cap \beta$.

b) Completează cu semnele $\in$, $\notin$, $\subset$ sau $\not\subset$ următoarele enunțuri:

i) D .... α; ii) A .... (d, g); iii) AD .... α; iv) AD .... (e, f).

c) Determină $(d, e) \cap (f, g)$.

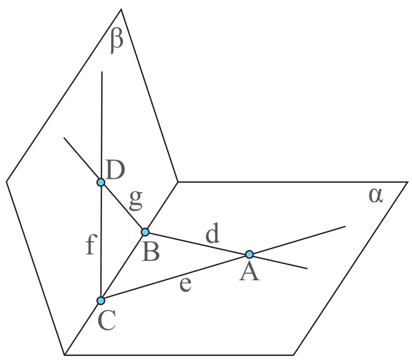


Figura 5

10. Se consideră un dreptunghi $ABCD$ și E un punct exterior planului dreptunghiului.

a) Realizează un desen corespunzător enunțului.

b) Scrie toate planele determinate de aceste puncte.

11. Într-un plan α se consideră punctele A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 și în exteriorul lui se consideră punctul M.

a) Care este cel mai mare număr de drepte determinate de aceste puncte și în ce condiții se obține acest număr de drepte?

b) Care este cel mai mic număr de drepte determinate de aceste puncte și în ce condiții se obține acest număr de drepte?

12. Într-un plan α se consideră punctele A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 și în exteriorul lui se consideră punctul M.

a) Care este cel mai mare număr de plane determinate de aceste puncte și în ce condiții se obține acest număr de plane?

b) Care este cel mai mic număr de plane care conțin și punctul M și în ce condiții se obține acest număr de plane?

13. Dreptunghiurile $ABCD$ și $ABEF$, din *Figura 6*, sunt situate în plane diferite.
a) Determină dreapta de intersecție a planelor (ABC) și (BDE).
b) Determină dreapta de intersecție a planelor (BDF) și (ACE).

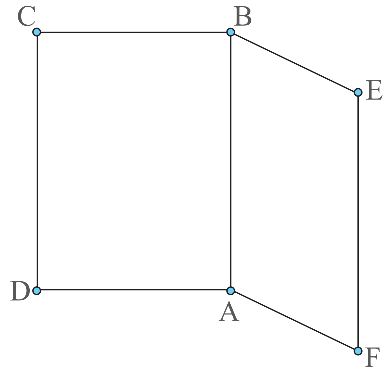


Figura 6

14. Problemă rezolvată: Se consideră dreptele diferite d_1, d_2 și d_3 astfel încât $d_1 \cap d_2 = \{A\}$, $d_1 \cap d_3 = \{B\}$ și $d_2 \cap d_3 = \{C\}$. Demonstrează că dacă punctele A, B și C sunt diferite, atunci dreptele sunt coplanare.

Soluție:

Cum gândesc: Pas 1. Punctele A, B, C nu pot fi coliniare.

Cum scriu: Din $d_1 \cap d_2 = \{A\} \Rightarrow A \in d_1$ și $A \in d_2$.
Din $d_1 \cap d_3 = \{B\} \Rightarrow B \in d_1$ și $B \in d_3$.
Din $d_2 \cap d_3 = \{C\} \Rightarrow C \in d_2$ și $C \in d_3$.
De aici $d_1 = AB$, $d_2 = AC$ și $d_3 = BC$.
Dacă punctele A, B, C sunt coliniare, atunci dreptele d_1, d_2 și d_3 coincid.
Dar d_1, d_2 și d_3 sunt drepte diferite.

Pas 2. Oricare trei puncte necoliniare determină un plan.

Se consideră $\alpha = (ABC)$.

Pas 3. Axioma includerii spune că „dacă două puncte aparțin unui plan, atunci dreapta determinată de ele este inclusă în plan”.

$$\left.\begin{matrix} A \in \alpha \\ B \in \alpha \end{matrix}\right\} \Rightarrow AB \subset \alpha. \text{ Dar } AB = d_1 \Rightarrow d_1 \subset \alpha.$$

$$\left.\begin{matrix} A \in \alpha \\ C \in \alpha \end{matrix}\right\} \Rightarrow AC \subset \alpha. \text{ Dar } AC = d_2 \Rightarrow d_2 \subset \alpha.$$

$$\left.\begin{matrix} B \in \alpha \\ C \in \alpha \end{matrix}\right\} \Rightarrow BC \subset \alpha. \text{ Dar } BC = d_3 \Rightarrow d_3 \subset \alpha.$$

Pas 4. Toate dreptele sunt în planul α, deci sunt coplanare.

De aici rezultă că d_1, d_2 și d_3 sunt coplanare.

15. Se consideră dreptele diferite d_1, d_2 și d_3 astfel încât $d_1 \cap d_2 = \{A\}$, $d_1 \cap d_3 = \{B\}$ și $d_2 \cap d_3 = \{C\}$. Demonstrează că dacă dreptele d_1, d_2 și d_3 sunt necoplanare, atunci punctele A, B și C coincid.

16. Problemă rezolvată: Se consideră dreptele necoplanare d_1, d_2 și d_3, concurente într-un punct O.

Pe dreapta d_1 se iau punctele A_1 și A_2, pe dreapta d_2 se iau punctele B_1 și B_2, pe dreapta d_3 se iau punctele C_1 și C_2 astfel încât $A_1B_1 \cap A_2B_2 = \{M\}$, $A_1C_1 \cap A_2C_2 = \{N\}$ și $B_1C_1 \cap B_2C_2 = \{P\}$.

Demonstrează că punctele M, N și P sunt coliniare. (**Teorema lui Desargues**)

Gerard Desargues (1591 – 1661) matematician și inginer francez. A fost unul dintre fondatorii geometriei proiective.

Soluție:

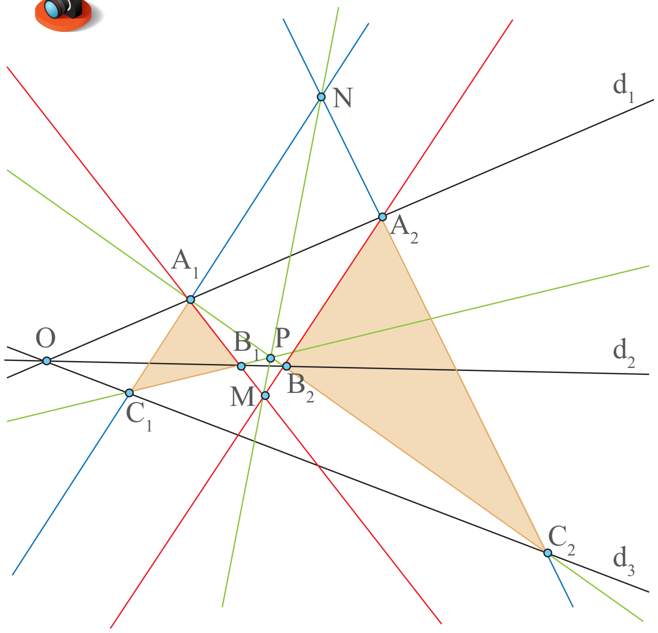


Figura 7

Cum gândesc: Pas 1. Trei puncte necoliniare determină un plan. (**Determinarea planului**)

Cum scriu: Punctele A_1, B_1 și C_1 sunt necoliniare, deci există un plan $\alpha = (A_1B_1C_1)$.
Punctele A_2, B_2 și C_2 sunt necoliniare, deci există un plan $\beta = (A_2B_2C_2)$.

Pas 2. Dacă două puncte sunt situate într-un plan, atunci dreapta determinată de ele este inclusă în acest plan. (**Axioma includerii**)

Cum $A_1, B_1 \in \alpha \Rightarrow A_1B_1 \subset \alpha$ și $A_2, B_2 \in \beta \Rightarrow A_2B_2 \subset \beta$.

Pas 3. Punctul M, fiind intersecția dreptelor A_1B_1 și A_2B_2, aparține ambelor plane, adică aparține dreptei lor de intersecție.

$\{M\} = A_1B_1 \cap A_2B_2 \Rightarrow M \in A_1B_1$ și $M \in A_2B_2$.
Deci $M \in A_1B_1 \subset \alpha \Rightarrow M \in \alpha$ și $M \in A_2B_2 \subset \beta \Rightarrow M \in \beta$.

Din $\left.\begin{array}{l} M \in \alpha \\ M \in \beta \end{array}\right\} \Rightarrow M \in \alpha \cap \beta$ (1).

Pas 4. Punctul N, fiind intersecția dreptelor A_1C_1 și A_2C_2, aparține ambelor plane, adică aparține dreptei lor de intersecție.

Punctul P, fiind intersecția dreptelor B_1C_1 și B_2C_2, aparține ambelor plane, adică aparține dreptei lor de intersecție.

Analog, $N \in \alpha \cap \beta$ (2) și $P \in \alpha \cap \beta$ (3).

Pas 5. Dacă două plane distincte au un punct comun, atunci au comun o dreaptă. (**Axioma intersecției**)

Considerăm $d = \alpha \cap \beta$.

Pas 6. Cum punctele M, N și P aparțin intersecției celor două plane, ele vor fi situate pe dreapta d, deci sunt coliniare.

Din (1), (2) și (3) rezultă $M, N, P \in d$, adică punctele M, N și P sunt coliniare.

2. Corpuri geometrice: piramida, piramida regulată, tetraedrul regulat; reprezentare, elemente caracteristice, desfășurări

Amintește-ți!


A


B


C


D

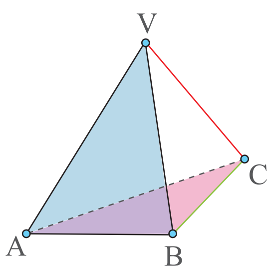

E

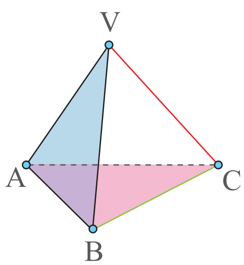
1. În care dintre imaginile de mai sus recunoști o piramidă?

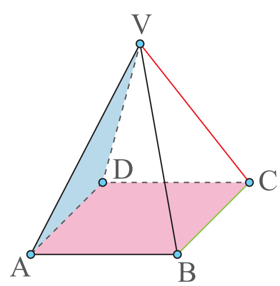
Important

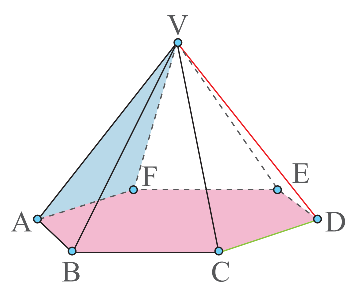
- Obiectele din spațiu se numesc corpuri geometrice.

- Piramida este un corp geometric.









- Elementele unei piramide:

▷ **Baza piramidei.** Este un poligon. În figurile de mai sus, bazele piramidelor sunt: triunghi, patrulater sau hexagon. Forma bazei dă numele piramidei: piramidă triunghiulară, piramidă patrulateră, piramidă hexagonală.

▷ **Fețele laterale.** Sunt totdeauna triunghiuri. Numărul fețelor laterale depinde de forma bazei.

La piramida triunghiulară sunt trei fețe laterale ($\triangle VAB$, $\triangle VBC$ și $\triangle VAC$).

La piramida patrulateră sunt patru fețe laterale ($\triangle VAB$, $\triangle VBC$, $\triangle VCD$ și $\triangle VDA$).

La piramida hexagonală sunt șase fețe laterale ($\triangle VAB$, $\triangle VBC$, $\triangle VCD$, $\triangle VDE$, $\triangle VEF$ și $\triangle VFA$).

▷ **Vârful piramidei.** Este punctul comun tuturor fețelor laterale (V).

▷ **Vârfurile bazei.** Sunt vârfurile poligonului care reprezintă baza piramidei (A, B și C la piramida triunghiulară, A, B, C și D la piramida patrulateră și A, B, C, D, E și F la piramida hexagonală).

▷ **Muchiile bazei.** Sunt laturile poligonului ce reprezintă baza piramidei (de exemplu: AB, BC, CD, DE, EF și FA la piramida hexagonală).

▷ **Muchiile laterale.** Sunt segmentele care unesc vârful piramidei cu vârfurile bazei. Numărul muchiilor laterale este egal cu numărul vârfurilor bazei (de exemplu: AV, BV, CV și DV la piramida patrulateră).

• Piramida triunghiulară se mai numește și **tetraedru**. La un tetraedru oricare față poate fi considerată bază.

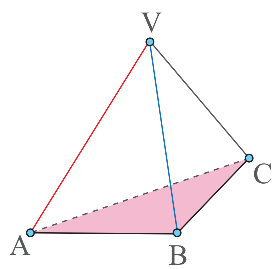
• **Piramida regulată** este piramida cu baza poligon regulat (triunghi echilateral, pătrat, hexagon regulat) și muchiile laterale congruente.

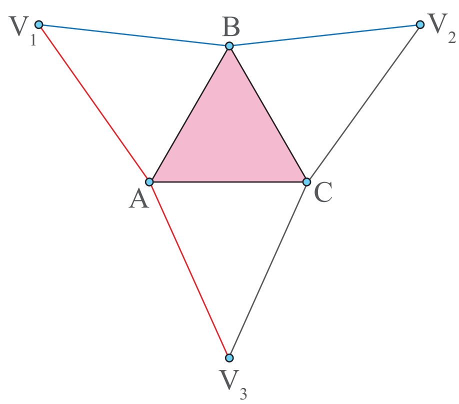
• **Tetraedru regulat** este un tetraedru cu toate muchiile congruente.

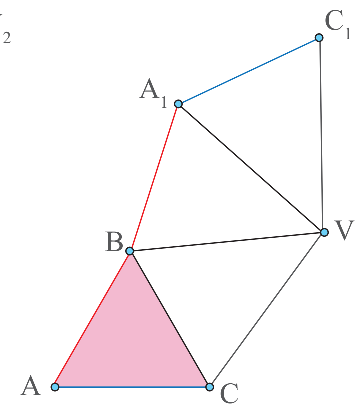
• **A desfășura o piramidă** înseamnă a reprezenta în același plan baza și fețele laterale astfel încât după decupare, prin pliere, să obținem piramida inițială.

• Posibile desfășurări ale unei piramide:

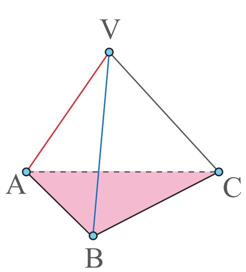
▷ Piramida regulată cu baza triunghi echilateral.

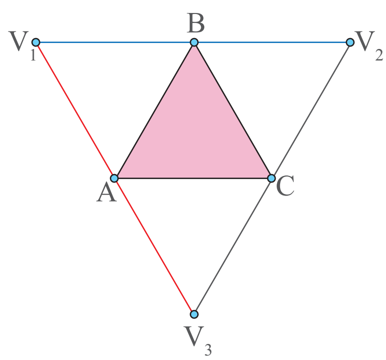


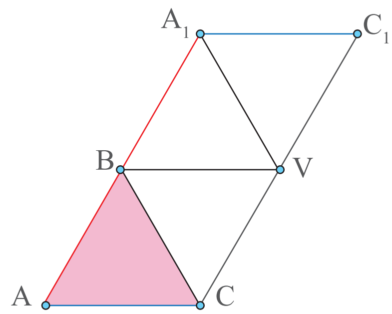




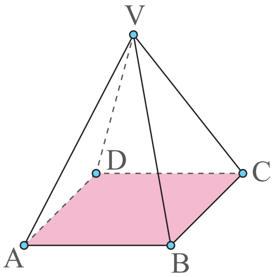
▷ Tetraedru regulat.

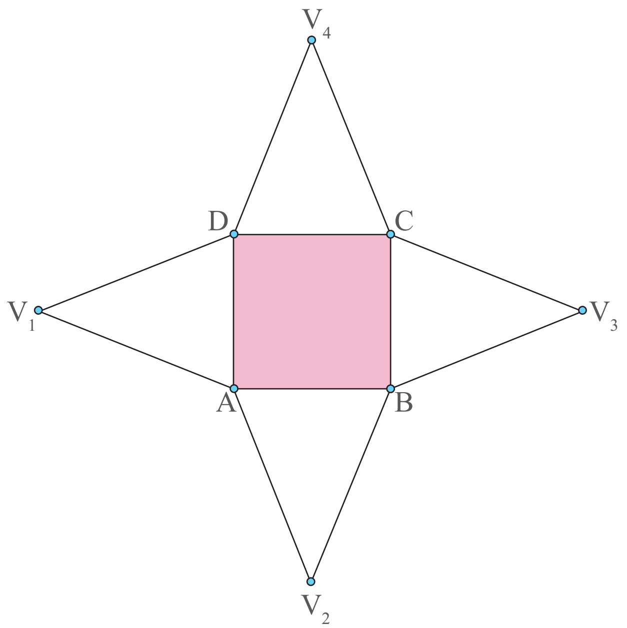


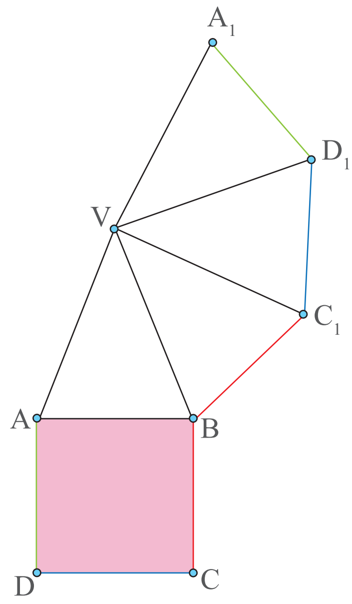




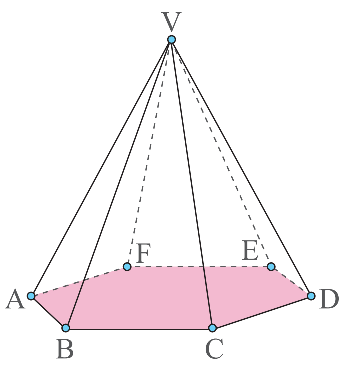
▷ Piramida regulată cu baza pătrat.

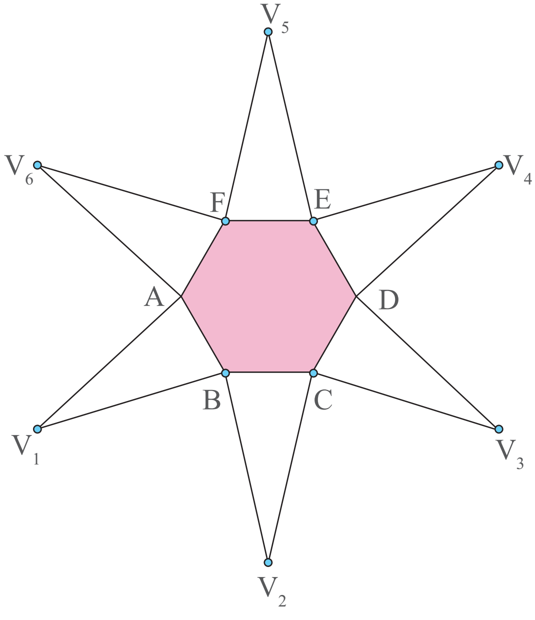


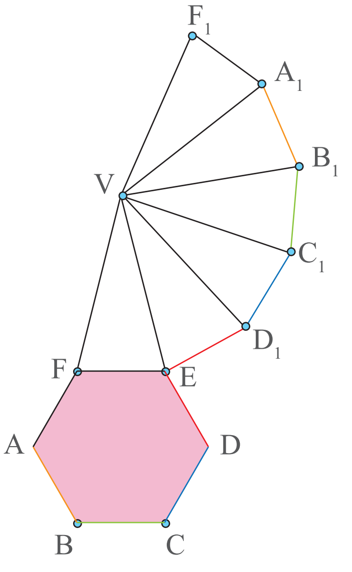




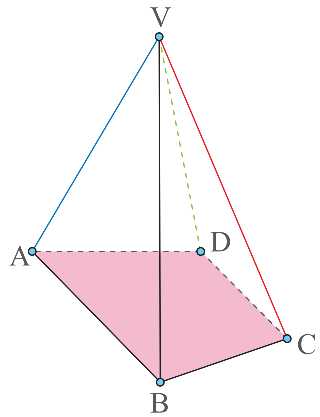
▷ Piramida regulată cu baza hexagon regulat.

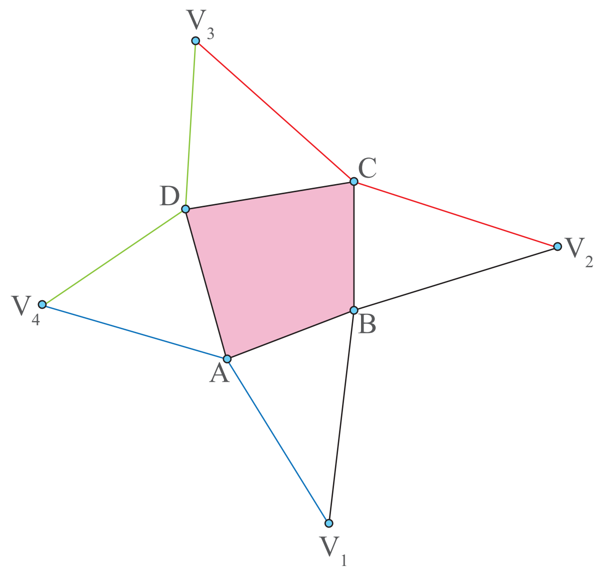






▷ Piramida patrulateră.





Exersează!

2. Completează spațiile punctate astfel încât să obținem afirmații adevărate:

a) Piramida cu baza triunghi se mai numește și .... .

b) O muchie a unui tetraedru regulat are lungimea egală cu 5 cm. Suma lungimilor tuturor muchiilor acestui tetraedru este egală cu .... cm.

c) O piramidă cu baza hexagon are .... fețe laterale.

d) O piramidă cu baza patrulater are cinci .... .

3. Se consideră patru piramide, una cu baza triunghi, una cu baza patrulater, una cu baza pentagon și una cu baza hexagon.

a) Realizează câte un desen pentru fiecare tip de piramidă.

b) Determină numărul de vârfuri v, pentru fiecare piramidă.

c) Determină numărul total de fețe f, pentru fiecare piramidă.

d) Determină numărul de muchii m, pentru fiecare piramidă.

e) Verifică, pentru fiecare piramidă în parte, relația $v - m + f = 2$.

4. O piramidă are 8 muchii. Determină numărul fețelor laterale ale acestei piramide.

5. O piramidă are 6 fețe laterale. Determină numărul muchiilor acestei piramide.

6. În *Figura 8* este reprezentată piramida $VABCDEF$ cu baza hexagon regulat, unde O este centrul hexagonului $ABCDEF$.

Determină următoarele intersecții de plane:

a) $(VAB) \cap (CDE)$; b) $(VAB) \cap (VBC)$; c) $(VOA) \cap (VOE)$; d) $(VOF) \cap (ABC)$; e) $(VCF) \cap (VBC)$; f) $(VCF) \cap (VBE)$; g) $(VAD) \cap (VBE)$; h) $(VCD) \cap (VEF)$ (Indicație: construiește $CD \cap EF = G$); i) $(VAB) \cap (VEF)$; j) $(VAC) \cap (VBF)$ (Indicație: construiește $AC \cap BF = \{H\}$); k) $(VCE) \cap (VDF)$.

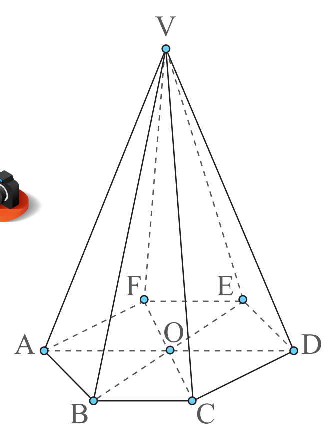


Figura 8

7. În *Figura 9* este desenată o piramidă triunghiulară $ABCD$ și punctele $M \in AB$ și $N \in CD$.

a) Câte plane distincte, din *Figura 9*, conțin punctul N?

b) Precizează dreapta de intersecție în fiecare dintre cazurile următoare: i) (ABN) și (ABC); ii) (AMN) și (BCD); iii) (ABN) și (CDM).

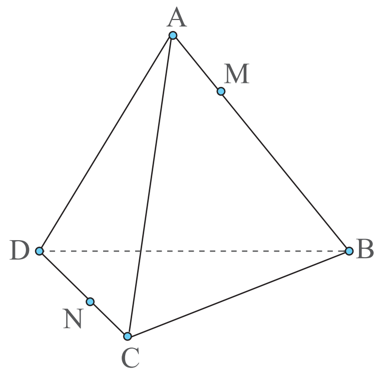


Figura 9

8. Un tetraedru regulat are muchia de lungime 8 cm. Calculează suma lungimilor tuturor muchiilor.

9. Suma lungimilor tuturor muchiilor unui tetraedru regulat este egală cu 72 cm.

a) Determină aria unei fețe a acestui tetraedru.

b) Determină perimetrul unei fețe a acestui tetraedru.

10. O piramidă regulată cu baza pătrat are muchia bazei egală cu 8 cm și muchia laterală egală cu 10 cm. a) Calculează perimetrul bazei. b) Calculează perimetrul unei fețe laterale. c) Calculează suma lungimilor tuturor muchiilor.

11. O piramidă regulată cu baza pătrat are fețele laterale triunghiuri echilaterale. Suma lungimilor tuturor muchiilor piramidei este 48 cm.

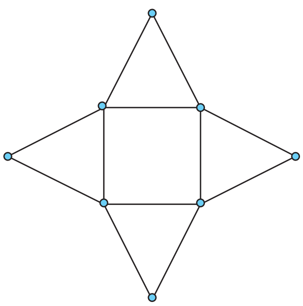
a) Cât este suma lungimilor muchiilor laterale ale acestei piramide?

b) Calculează aria bazei piramidei.

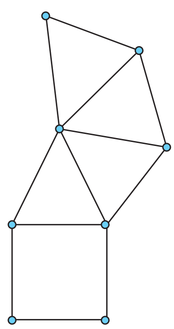
12. Se consideră tetraedrul regulat $ABCD$, cu $AB = 6$ cm. O furnică pleacă din vârful B și ajunge în vârful D mergând pe fețele ABC și ACD. Determină lungimea celui mai scurt drum pe care furnica ajunge din B în D.

13. Care dintre următoarele imagini pot reprezenta desfășurări ale unei piramide regulate cu baza pătrat?

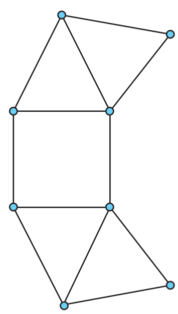
a)



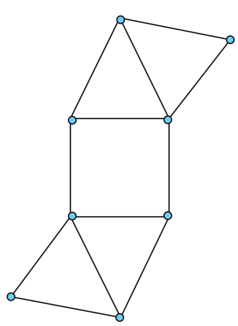
b)



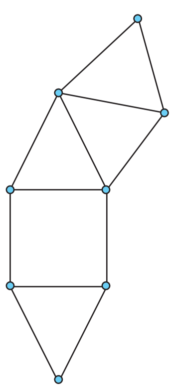
c)



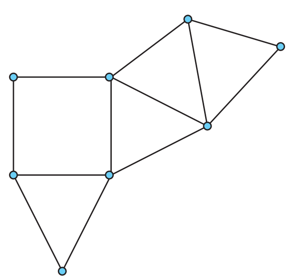
d)



e)



f)



3. Corpuri geometrice: prisma dreaptă, paralelipiped dreptunghic, cub; reprezentare, elemente caracteristice, desfășurări

Amintește-ți!

A B C D E

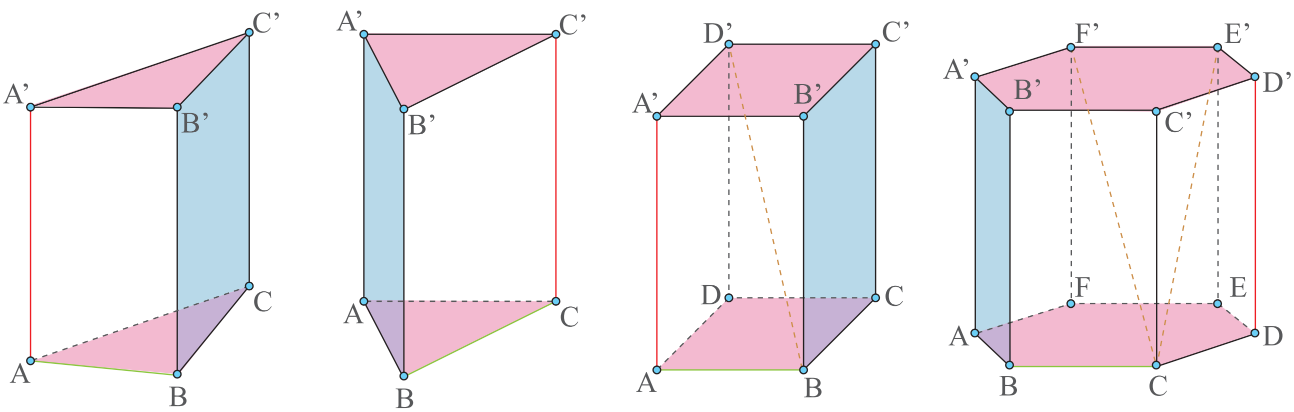
1	2	3
Cub	Paralelipiped dreptunghic	Prismă dreaptă

1. Asociază, dacă este posibil, obiectele din primul rând cu denumirea corespunzătoare din tabel, după model.

Model: (A,3).

Important

• **Prisma dreaptă** este un corp geometric.



• **Elementele unei prisme drepte:**

▷ **Bazele prismei.** Sunt două poligoane congruente. În figurile de mai sus bazele prismelor sunt: triunghiurile ABC și $A'B'C'$, pătratele $ABCD$ și $A'B'C'D'$ sau hexagoanele $ABCDEF$ și $A'B'C'D'E'F'$. Forma bazei dă numele prismei: prismă dreaptă cu baza triunghi, prismă dreaptă cu baza patrulater, prismă dreaptă cu baza hexagon.

▷ **Fețe laterale.** Sunt totdeauna dreptunghiuri. Numărul fețelor laterale depinde de forma bazei. La prisma dreaptă cu baza triunghi sunt trei fețe laterale: $ABB'A'$, $BCC'B'$ și $ACC'A'$. La prisma dreaptă cu baza patrulater sunt patru fețe laterale: $ABB'A'$, $BCC'B'$, $CDD'C'$ și $ADD'A'$. La prisma dreaptă cu baza hexagon sunt șase fețe laterale: $ABB'A'$, $BCC'B'$, $CDD'C'$, $DEE'D'$, $EFF'E'$ și $FAA'F'$.

▷ **Muchiile bazelor.** Sunt laturile poligoanelor ce reprezintă bazele prismei (AB, BC, CD și DA, respectiv $A'B'$, $B'C'$, $C'D'$ și $D'A'$ la o prismă dreaptă cu baza patrulater).

▷ **Vârfurile prismei.** Sunt vârfurile poligoanelor care reprezintă bazele prismei (A, B, C, A', B' și C' la o prismă dreaptă cu baza triunghi).

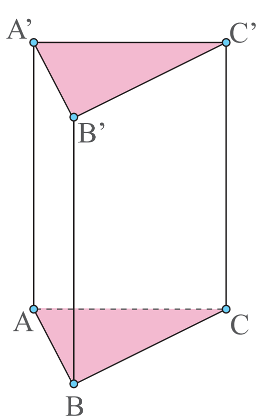
▷ **Muchiile laterale.** Sunt laturile unei fețe laterale care nu sunt muchii ale bazei. Numărul muchiilor laterale depinde de forma bazei. La prisma dreaptă cu baza triunghi sunt trei muchii laterale: AA', BB' și CC'. La prisma dreaptă cu baza patrulater sunt patru muchii laterale: AA', BB', CC' și DD'. La prisma dreaptă cu baza hexagon sunt șase muchii laterale: AA', BB', CC', DD', EE' și FF'.

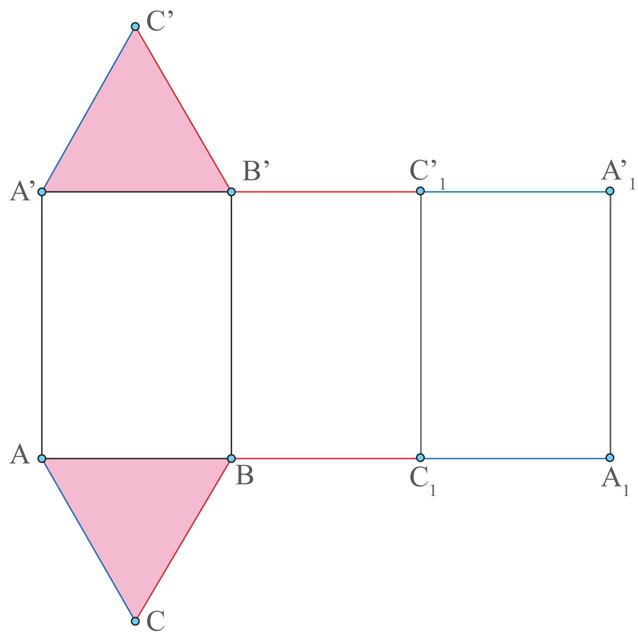
▷ **Diagonalele prismei** sunt segmente care unesc două vârfuri din baze diferite, nesituate pe aceeași față laterală. Prisma dreaptă cu baza triunghi nu are diagonale. În prisma dreaptă cu baza patrulater sunt patru diagonale: AC', BD', CA' și DB'. În prisma dreaptă cu baza hexagon sunt 18 diagonale: AD', BE', CF', DA', EB', FC', AC', AE', BD', BF', CA', CE', DB', DF', EC', EA', FD' și FB'.

• **A desfășura o prismă dreaptă** înseamnă a reprezenta în același plan bazele și fețele laterale astfel încât după decupare, prin pliere, să obținem prisma inițială.

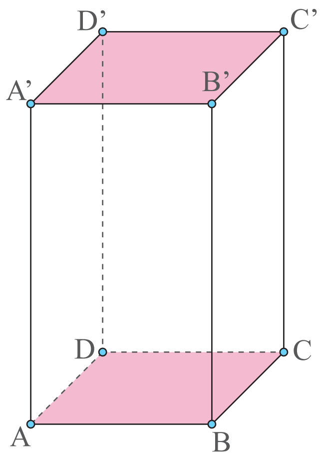
• Posibile desfășurări ale unei prisme:

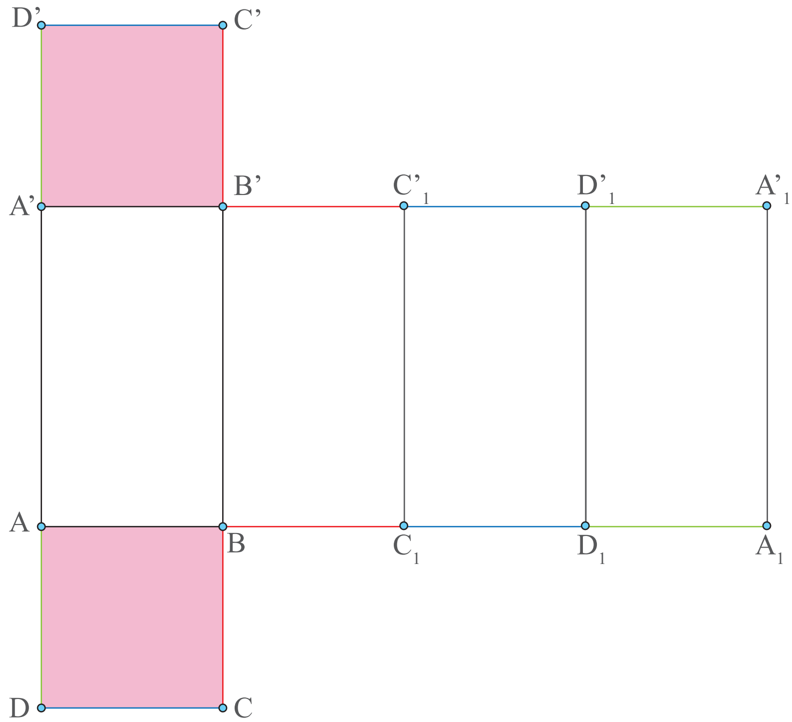
▷ Prisma dreaptă cu baza triunghi echilateral.



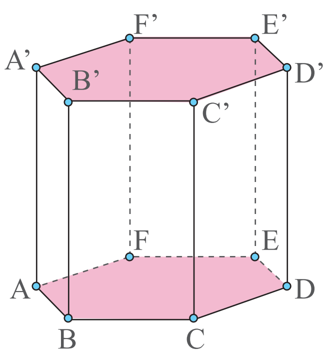


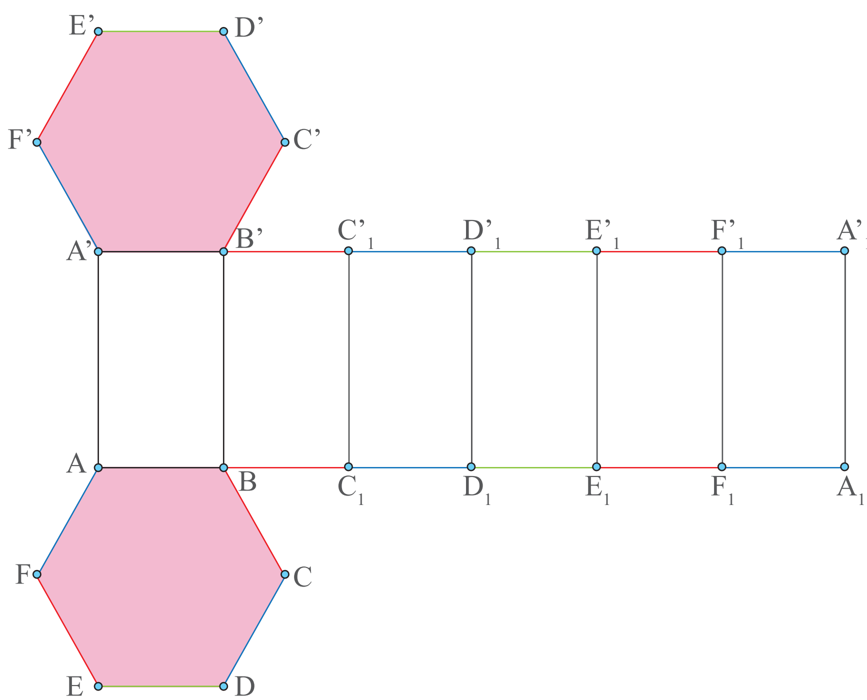
▷ Prisma dreaptă cu baza pătrat.



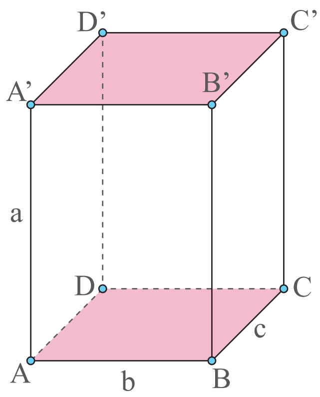


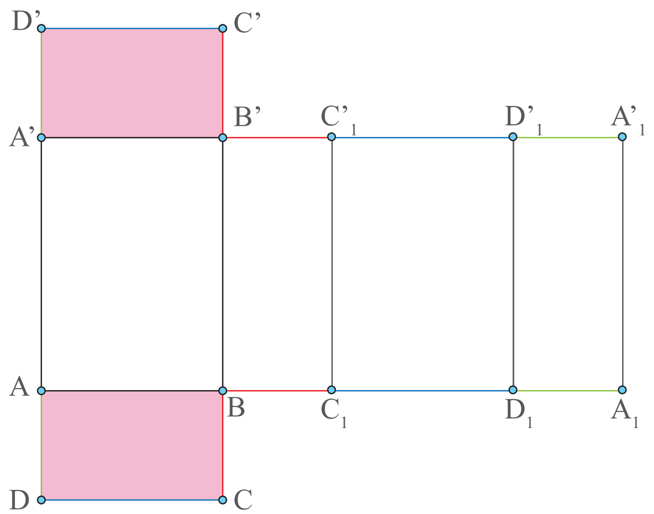
▷ Prisma dreaptă cu baza hexagon regulat.





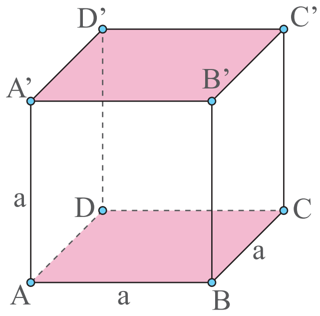
• **Paralelipipedul dreptunghic** este o prismă dreaptă în care bazele sunt dreptunghiuri. La un paralelipiped dreptunghic oricare două fețe opuse pot fi considerate baze.

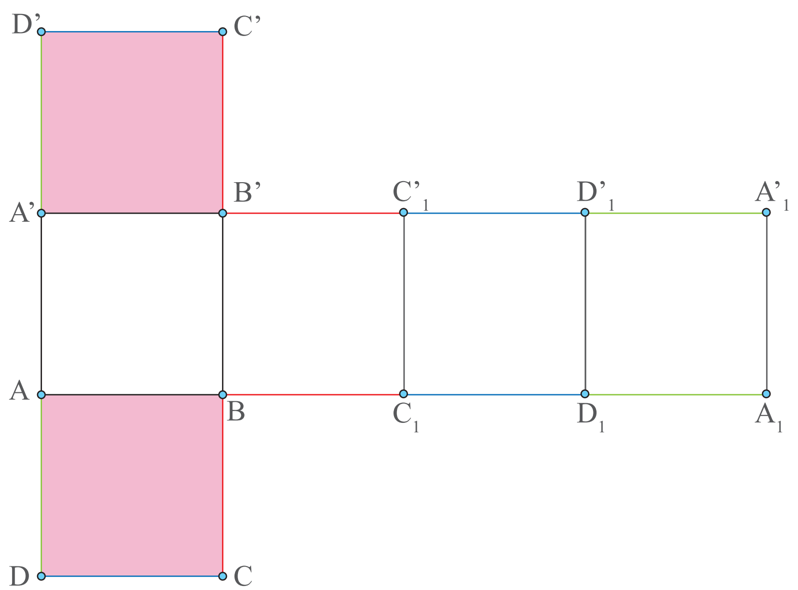




• La paralelipipedul dreptunghic muchiile sunt patru câte patru congruente:
$AB \equiv CD \equiv C'D' \equiv A'B'$;
$BC \equiv AD \equiv A'D' \equiv B'C'$;
$AA' \equiv BB' \equiv CC' \equiv DD'$.
Din acest motiv spunem paralelipipedul dreptunghic cu dimensiunile a, b, c.

• **Cubul** este un paralelipiped dreptunghic în care toate fețele sunt pătrate.





• Cubul are toate muchiile congruente. Din acest motiv spunem cubul de muchie a.

Exersează!

2. Precizează ce corpuri geometrice observi în fiecare dintre imaginile următoare:


Creioane


Magneți


Containere


Zaruri

3. În *Figura 10*, este reprezentată desfășurarea unui paralelipiped dreptunghic, unde pe mai multe laturi este construit câte un trapez.

a) Realizează pe o bucată de carton imaginea din *Figura 10*, decupează-o și construiește paralelipipedul dreptunghic. Vei observa astfel că trapezul reprezintă o zonă pe care o poți acoperi cu lipici, astfel încât corpul geometric construit să nu se „dezintegreze” imediat după formare.

b) Realizează, pe o bucată de carton imagini asemănătoare cu cele de la punctul anterior pentru prisma dreaptă cu baza triunghi și pentru cub.

c) Decupează imaginile obținute la punctul anterior și construiește prisma dreaptă cu baza triunghi și cubul.

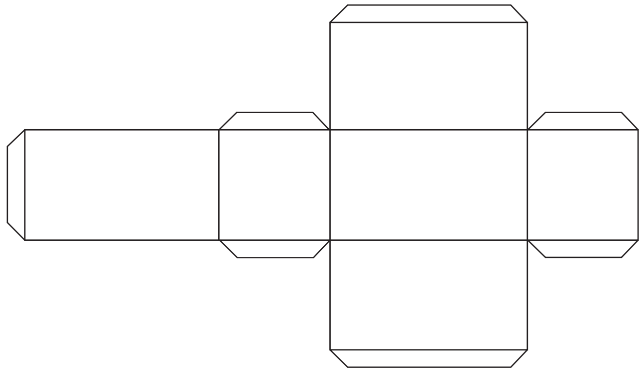


Figura 10

4. În *Figura 11* este reprezentată o prismă dreaptă cu baza triunghi.

a) Enumeră vârfurile, muchiile și fețele prismei.

b) Determină următoarele intersecții:

i) $(BCN) \cap (ACM)$; ii) $(ABN) \cap (CNP)$;
iii) $(CMP) \cap (ANB)$; iv) $(ANB) \cap (MNP)$.

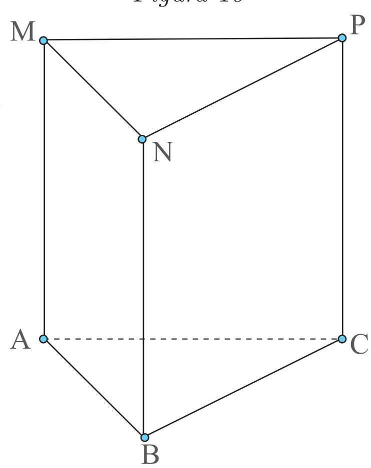


Figura 11

5. În *Figura 12*, este reprezentat un cub Rubik. Un cub Rubik are proprietatea că oricum am alege două fețe distincte, acestea au culori diferite (alb, roșu, galben, verde, albastru, portocaliu). Mai mult, acest cub poate fi interpretat ca alipirea a 27 de cuburi mai mici (3x3x3), pe care le vom denumi cubulețe. Determină câte dintre cubulețele cubului Rubik au:

a) 0 fețe colorate, în culori din enunțul problemei;
b) 1 față colorată, în culori din enunțul problemei;
c) 2 fețe colorate, în culori din enunțul problemei;
d) 3 fețe colorate, în culori din enunțul problemei;
e) 4 fețe colorate, în culori din enunțul problemei.

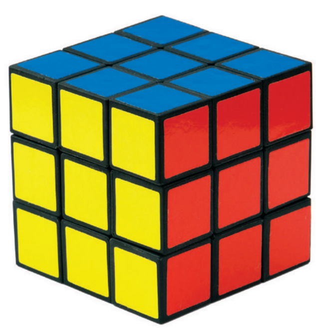


Figura 12

6. Există cuburi Rubik de forma $2 \times 2 \times 2$, care au numai patru culori: alb, albastru, roșu și galben. Determină câte dintre cubulețele unui astfel de cub Rubik au:

a) 0 fețe colorate, în culori din enunțul problemei;
b) 1 față colorată, în culori din enunțul problemei;
c) 2 fețe colorate, în culori din enunțul problemei;
d) 3 fețe colorate, în culori din enunțul problemei;
e) 4 fețe colorate, în culori din enunțul problemei.

7. Se consideră o prismă dreaptă cu baza triunghi.

a) Realizează un desen corespunzător.
b) Enumeră fețele, muchiile și vârfurile corpului desenat.
c) Notează cu f numărul total de fețe al corpului, cu m numărul total de muchii și cu v numărul total de vârfuri și verifică dacă este adevărată relația $v - m + f = 2$.

8. Se consideră o prismă dreaptă cu baza patrulater.

a) Realizează un desen corespunzător.
b) Enumeră fețele, muchiile și vârfurile corpului desenat.
c) Notează cu f numărul total de fețe al corpului, cu m numărul total de muchii și cu v numărul total de vârfuri și verifică dacă este adevărată relația $v - m + f = 2$.

9. Se consideră o prismă dreaptă cu baza hexagon.

a) Realizează un desen corespunzător.
b) Enumeră fețele, muchiile și vârfurile corpului desenat.
c) Notează cu f numărul total de fețe al corpului, cu m numărul total de muchii și cu v numărul total de vârfuri și verifică dacă este adevărată relația $v - m + f = 2$.

10. Se consideră un paralelipiped dreptunghic.

a) Realizează un desen corespunzător.
b) Enumeră fețele, muchiile și vârfurile corpului desenat.
c) Notează cu f numărul total de fețe al corpului, cu m numărul total de muchii și cu v numărul total de vârfuri și verifică dacă este adevărată relația $v - m + f = 2$.

11. Se consideră un cub.

a) Realizează un desen corespunzător.
b) Enumeră fețele, muchiile și vârfurile corpului desenat.
c) Notează cu f numărul total de fețe al corpului, cu m numărul total de muchii și cu v numărul total de vârfuri și verifică dacă este adevărată relația $v - m + f = 2$.

12. Se consideră paralelipipedul dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$. Dacă $AB = 10$ cm, $BC = 15$ cm și $CC' = 20$ cm, calculează suma lungimilor tuturor muchiilor.

13. Dacă suma lungimilor tuturor muchiilor unui cub este egală cu 64 m, calculează lungimea unei muchii a cubului.

14. În *Figura 13* este schița unui bloc având forma unui paralelipiped dreptunghic. Trebuie construită o scară exterioară care să pornească din punctul A și să ajungă în punctul A', urmând traseul din schiță. Se știe că dimensiunile blocului sunt $AA' = 30$ m, $AB = 12$ m și $BC = 24$ m.

a) Determină lungimea minimă a scării.
b) Determină lungimile segmentelor DE, CF și BG pentru care lungimea scării este minimă.

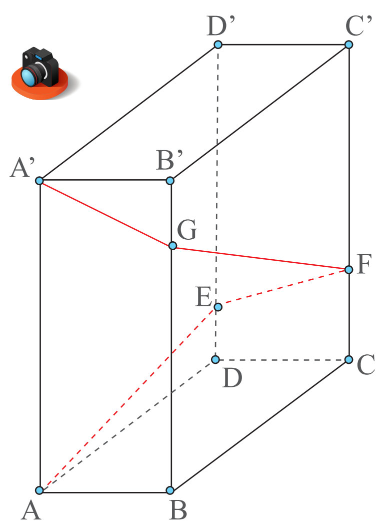


Figura 13

4. Corpuri geometrice: cilindru circular drept; con circular drept; reprezentare, elemente caracteristice, desfășurări

Amintește-ți!

A

B

C

D

E

1	2
Cilindru circular	Con circular

1. Asociază, dacă este posibil, obiectele din primul rând cu denumirea corespunzătoare din tabel, după model.

Model: (A,2).

Important

- **Cilindrul circular drept** este un corp geometric.

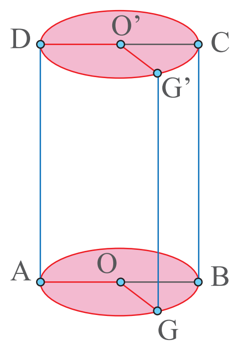
- **Elementele unui cilindru circular drept:**

▷ **Bazele cilindrului.** Sunt două cercuri de raze egale.

▷ **Raza bazei.** Este lungimea razei unei baze a cilindrului. De exemplu, OA sau $O'G'$.

▷ **Suprafața cilindrică.** Un cilindru nu are fețe laterale. Are o singură față numită suprafață cilindrică.

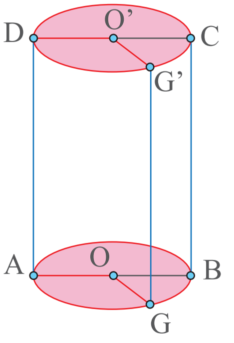
▷ **Generatoarea cilindrului.** Este un segment care aparține suprafeței cilindrice și unește două puncte situate pe cele două baze astfel încât distanța dintre ele să fie minimă. De exemplu, GG' sau AD.

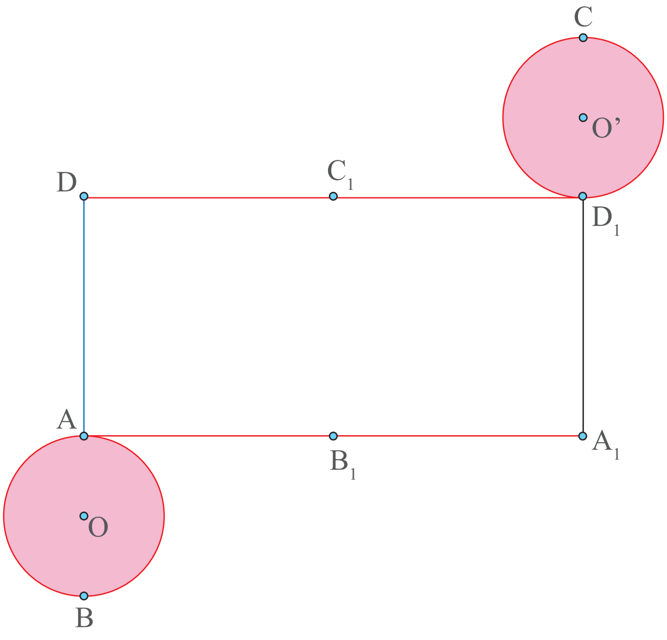


- Toate generatoarele unui cilindru circular drept sunt congruente.

- **A desfășura un cilindru circular drept** înseamnă a reprezenta în același plan bazele și suprafața cilindrică astfel încât dacă decupăm, prin pliere, să obținem cilindrul inițial.

▷ Posibilă desfășurare a unui cilindru circular drept:





• **Conul circular drept** este un corp geometric.

• **Elementele unui con circular drept:**

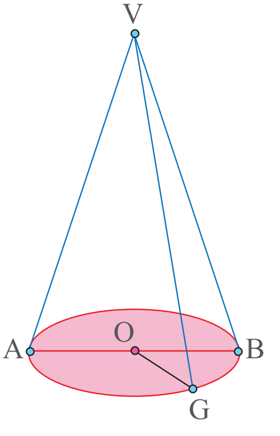
▷ **Baza conului.** Este un cerc.

▷ **Vârful conului.** Este un punct nesituat în planul în care se află baza conului și formează cu orice coardă a bazei un triunghi isoscel (V).

▷ **Raza bazei.** Este lungimea razei bazei conului. De exemplu, OA sau OG.

▷ **Suprafața conică.** Un con nu are fețe laterale. Are o singură față numită suprafață conică.

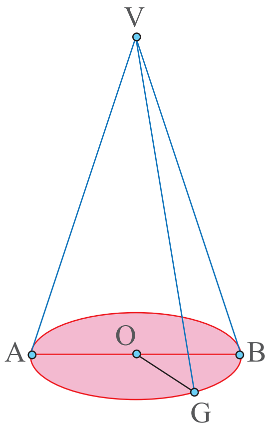
▷ **Generatoarea conului.** Este un segment care unește vârful conului cu un punct situat pe baza conului. De exemplu, VA sau VG.

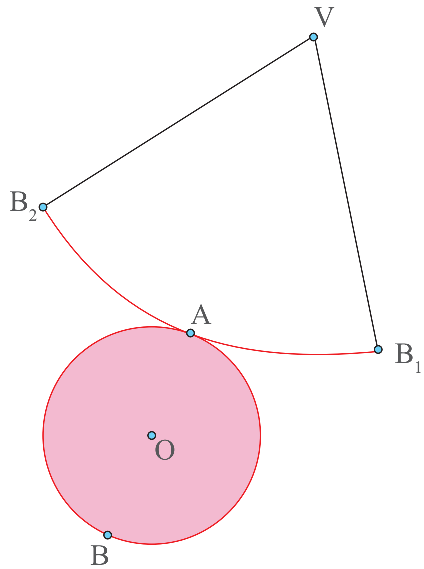


• Toate generatoarele unui con circular drept sunt congruente.

• **A desfășura un con circular drept** înseamnă a reprezenta în același plan baza și suprafața conică astfel încât după decupare, prin pliere, să obținem conul inițial.

▷ Posibilă desfășurare a unui con circular drept:





Exersează!

2. Precizează ce corpuri geometrice observi în fiecare dintre imaginile următoare:

Pălărie orientală

Trunchiuri de copaci

Far

3. În *Figura 14*, este reprezentată desfășurarea unui cilindru circular drept unde pe o latură este construit un trapez, iar pe cercuri sunt construite alte forme geometrice asemănătoare unui trapez.

Realizează pe o bucată de carton imaginea din *Figura 14*, decupeaz-o și construiește cilindrul circular drept.

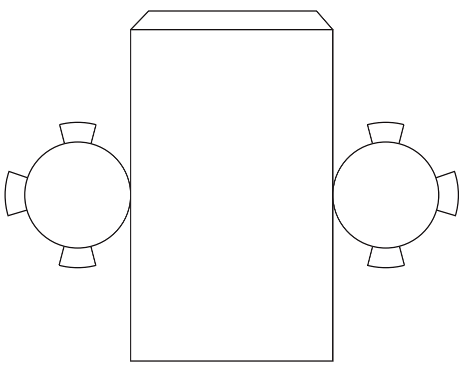


Figura 14

4. Realizează o imagine asemănătoare pentru un con circular drept și construiește apoi conul.

5. a) Desenează un cilindru circular drept.

b) Construiește punctele distincte A, B, C și D pe una dintre bazele cilindrului astfel încât punctele A și C, respectiv B și D să fie puncte diametral opuse.

c) Construiește apoi punctele distincte A', B', C' și D' pe cealaltă bază a cilindrului astfel încât AA', BB', CC' și DD' să fie generatoare ale cilindrului.

d) Stabilește dacă următoarele relații sunt adevărate sau false:

i) $AA' = BB'$; ii) $A'C' = AC$; iii) $AC = BD$.

e) Determină $(ABB') \cap (A'C'D')$.

f) Notează cu O centrul bazei pe care se află punctele A, B, C și D și cu O' centrul bazei pe care se află punctele A', B', C' și D'. Determină $(AA'O') \cap (BOB')$.

6. În *Figura 15* este reprezentată desfășurarea unui cilindru circular drept.

a) Dacă lungimea cercului de la baza cilindrului este 14π cm, ce lungime are segmentul AA_1?

b) Știind că aria dreptunghiului AA_1D_1D este egală cu 70π cm^2, determină lungimea generatoarei cilindrului.

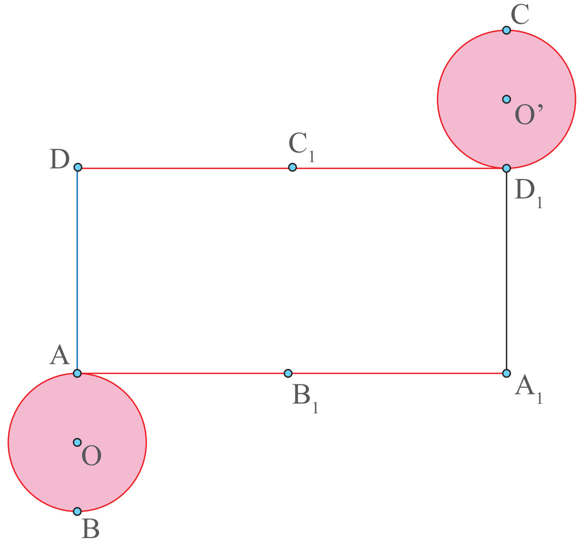


Figura 15

7. a) Desenează un con circular drept și notează vârful conului cu V și centrul bazei cu O.

b) Construiește punctele distincte A, B, C și D pe baza conului astfel încât punctele A și C, respectiv B și D să fie puncte diametral opuse.

c) Stabilește dacă următoarele relații sunt adevărate sau false:

i) $AO = CO$; ii) $VA = VB$; iii) $AC = BD$.

d) Determină $(VAC) \cap (ABC)$.

e) Determină $(VOA) \cap (VOB)$.

8. În *Figura 16* alăturată este reprezentată desfășurarea unui con circular drept, în care lungimea arcului de cerc B_1B_2 este egală cu 12π cm.

a) Ce lungime are cercul de la baza conului?

b) Determină raza conului.

c) Dacă generatoarea conului are lungimea egală cu 36 cm, determină măsura unghiului B_1VB_2.

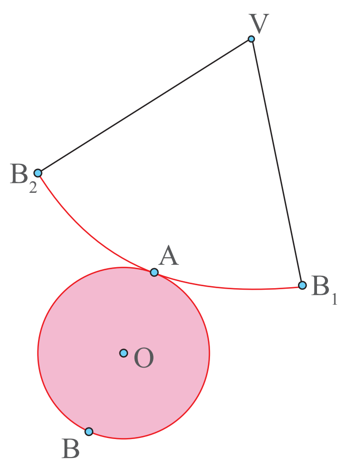


Figura 16

9. În *Figura 17* este reprezentat schematic, un turn dintr-un castel medieval în care $ABCD$ este un cilindru circular drept și VCD este un con circular drept. Pentru a fi inclus în lista obiectivelor turistice, trebuie instalată o scară exterioară, scară ce va fi utilizată în caz de incendiu. Ioana este arhitect și se ocupă de construcția acestei scări. Dimensiunile turnului sunt următoarele: raza cilindrului este de 30 de metri, iar generatoarea cilindrului de 80 de metri. Se va considera valoarea lui π egală cu 3.

a) În primă fază, Ioana realizează scara de incendiu precum linia albastră din *Figura 17* și reprezintă cel mai scurt drum din punctul A în punctul D, parcurgând suprafața cilindrului. Determină lungimea scării în acest caz.

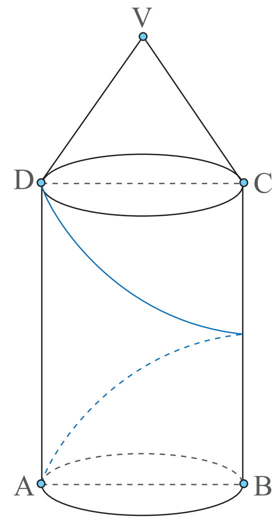


Figura 17

b) Proiectul Ioanei de la punctul a) nu a fost aprobat, deoarece acea scară nu trece prin punctul M, mijlocul segmentului AD, unde se află o fereastră ce ar putea fi transformată în ușă de incendiu. Ioana se adaptează și realizează proiectul precum în *Figura 18*, unde scara este reprezentată de linia verde. Aici, scara a fost construită ca fiind cel mai scurt drum din punctul A în punctul M și apoi din punctul M în punctul D, scara fiind construită pe suprafața cilindrului. Determină lungimea scării în acest caz.

c) În ambele cazuri se evită construcția unei scări pe generatoarea AD. Justifică de ce o astfel de scară nu ar fi potrivită, din punct de vedere practic.

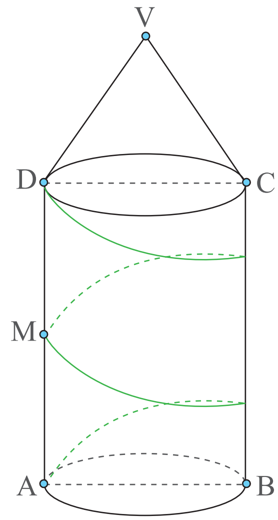


Figura 18

5. Recapitulare

1. Asociază fiecare noțiune de geometrie din coloana **A** cu obiectul pe care îl poate reprezenta din coloana **B**:

A	**B**
i) punct	1) Liniile de tren
ii) dreaptă	2) Ecranul unui telefon
iii) plan	3) Atomul
	4) Un dulap

2. Completează spațiile punctate astfel încât următoarele afirmații să fie adevărate.

a) Un plan este determinat de .... puncte necoliniare.

b) Două puncte distincte determină o .... .

c) O dreaptă și un punct exterior ei determină un .... .

d) Dacă două plane distincte au în comun un punct, atunci ele au în comun o .... .

e) .... nu are dimensiune, are doar poziție.

f) .... are trei dimensiuni.

3. Desenează un paralelipiped dreptunghic $ABCDEFGH$ și construiește diagonalele sale.

4. Desenează conul circular drept VMN și construiește generatoarea VA.

5. Desenează o prismă dreaptă cu baza triunghi echilateral.

6. Se consideră planul α și dreptele d_1 și d_2, ca în *Figura 19*, unde știm că $d_1 \subset \alpha$; $d_1 \parallel d_2$; $A \in d_2$ și $A \in \alpha$.

Justifică de ce $d_2 \subset \alpha$.

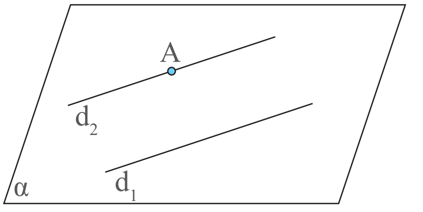


Figura 19

7. Se consideră patru puncte M, N, P și Q, oricare trei necoliniare, astfel încât $MN \parallel PQ$.

a) Justifică de ce punctele M, N, P și Q sunt coplanare.

b) Arată că $MQ \subset (MNP)$.

c) Demonstrează că $MP \subset (MNQ)$.

d) Dacă R este intersecția dreptelor MQ și NP, demonstrează că $R \in (MNP)$.

8. Se consideră M, N, P și Q patru puncte distincte astfel încât $MP \cap NQ = \{A\}$.

a) Justifică de ce punctele M, N, P și Q sunt coplanare.

b) Arată că $MQ \subset (MNP)$.

c) Demonstrează că $MP \subset (MNQ)$.

d) Dacă R este intersecția dreptelor MQ și NP, demonstrează că $R \in (MNP)$.

9. Se consideră α și β două plane, ca în *Figura 20*, astfel încât $\alpha \cap \beta = d$. Se știe că $e \subset \alpha$, $d \cap e = \{A\}$ și $f \subset \beta$, $d \cap f = \{B\}$.

a) Stabilește dacă $A \in \beta$.

b) Stabilește dacă $B \in \alpha$.

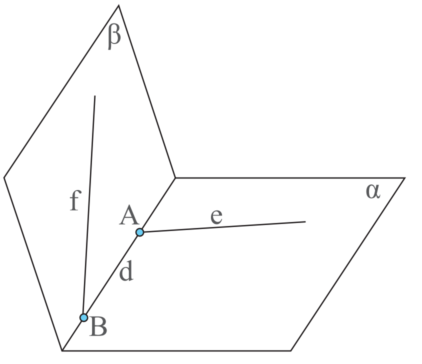


Figura 20

10. În *Figura 21* este reprezentată piramida regulată cu baza pătrat $VABCD$, unde O este centrul bazei.

Determină următoarele intersecții de plane:

i) $(VAB) \cap (ABC)$; ii) $(VBC) \cap (ABD)$;
iii) $(VOA) \cap (ABC)$; iv) $(VOB) \cap (VOC)$;
v) $(VOA) \cap (VOC)$; vi) $(VOA) \cap (VBC)$;
vii) $(VOC) \cap (VBC)$; viii) $(VOB) \cap (VCD)$.

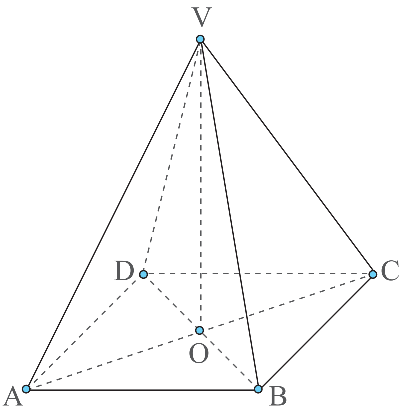


Figura 21

11. Se consideră tetraedrul $VABC$.

a) Desenează tetraedrul $VABC$.

b) Stabilește care dintre următoarele enunțuri sunt adevărate și care sunt false:

i) $V \in (ABC)$; ii) $VC \subset (VAB)$; iii) $VB \subset (ABC)$.

c) Determină $(VAB) \cap (ABC)$ și $(VAB) \cap (VBC)$.

12. O prismă dreaptă $ABCDEFA'B'C'D'E'F'$ cu baza hexagon regulat are fețele laterale pătrate. Dacă suma lungimilor muchiilor laterale este egală cu 36 cm, determină aria bazei $ABCDEF$.

13. Suma lungimilor tuturor muchiilor unei piramide regulate cu baza hexagon regulat este egală cu 48 cm. Dacă muchia laterală are lungimea de 5 cm, determină:

a) lungimea muchiei bazei;

b) perimetrul bazei;

c) aria unei fețe laterale.

14. În conul circular drept din *Figura 22*, AB este diametru, iar triunghiul VAB este dreptunghic. Generatoarea conului este de $4\sqrt{2}$ cm.

a) Determină lungimea cercului de la baza conului.

b) Determină aria bazei conului.

c) Dacă C este un punct pe baza conului astfel încât $\sphericalangle ABC = 30°$, determină distanța de la punctul V la dreapta AC.

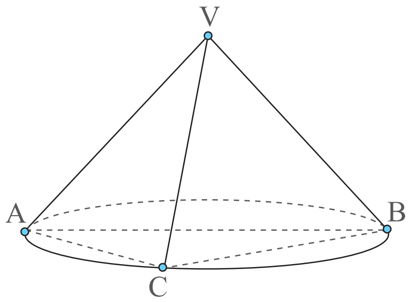


Figura 22

15. În *Figura 23* este schița unei cutii în formă de prismă dreaptă cu baza pătrat. Pe cutie s-a desenat cu markerul o linie roșie, ca în figură. Punctele M și N sunt fixate și reprezintă mijloacele muchiilor CC' și DD'. Latura bazei $AB = 6$ cm, iar muchia laterală $AA' = 10$ cm. Care este lungimea minimă a liniei roșii?

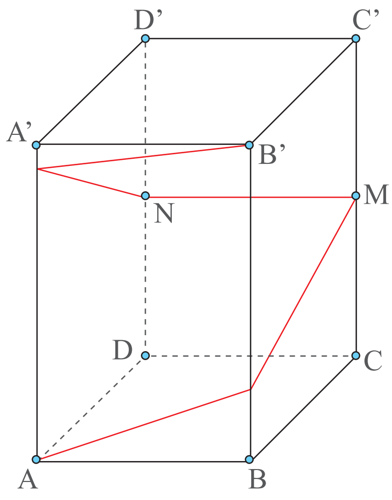


Figura 23

16. În *Figura 24* este reprezentat schematic un rezervor în formă de cilindru circular drept cu raza bazei de 3 m și generatoarea de 4 m. Punctele A și B, respectiv C și D sunt diametral opuse, iar AD și BC sunt generatoare. Se va considera valoarea lui π egală cu 3.

Pentru a ajunge pe acoperiș se merge din punctul A până în punctul E pe o scară lipită de suprafața cilindrică, iar din punctul E până în punctul C pe o scară ce urmează generatoarea cilindrului.

Ce lungime are drumul din punctul A până în punctul C?

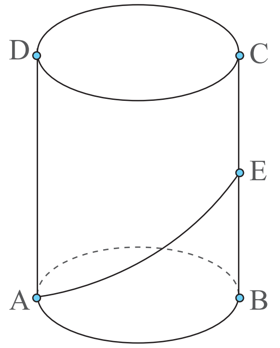


Figura 24

17. Un elicopter al echipei de salvamont trebuie să ajungă din punctul B în punctul F pe drumul cel mai scurt. Elicopterul poate ocoli muntele din imagine doar în plan orizontal (trecând prin oricare dintre punctele $A - B - C - D - E - F$) sau în plan vertical (trecând prin V). Elicopterul nu poate trece prin interiorul piramidei. În zona versanților aflați pe fețele VAB și VAF sunt înregistrate valori foarte mari ale vitezelor curenților de aer și elicopterul trebuie să evite acele zone.

Dacă elicopterul își schimbă altitudinea, atunci zboară cu 10 m/s. Dacă își păstrează altitudinea, zboară cu 25 m/s.

Dacă $VABCDEF$ reprezintă o piramidă regulată cu baza hexagon regulat, cu $AB = 200$ m și $VA = 250$ m, determină care este cea mai rapidă rută de a ajunge din B în F, știind că elicopterul va zbura numai pe muchiile piramidei.

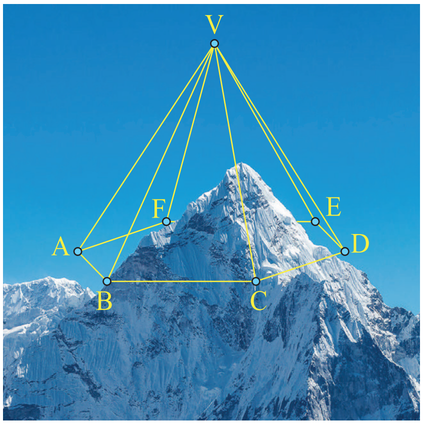


Figura 25

AUTOEVALUARE – În această unitate de învățare:

Am înțeles foarte bine ....

Îmi este neclar ....

Nu știu să .... / Nu am înțeles ....

Revezi lecțiile și exercițiile noțiunilor notate la culoarea galbenă. Discută cu un coleg/ o colegă sau cu profesorul despre ceea ce nu ai înțeles și ai completat la culoarea roșie.