

# Capitolul 5. NOȚIUNI GEOMETRICE FUNDAMENTALE

## Unitatea de învățare: Unghiuri

### LECȚIA 1. Unghiuri suplementare; unghiuri complementare

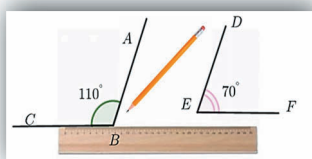


**A1. a)** Indicați (precizând poziția, de la stânga la dreapta) ceasurile ale căror limbi care indică ora și minutul formează unghiuri: drepte, ascuțite, obtuze, alungite, respectiv nule;

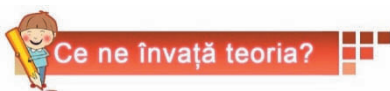
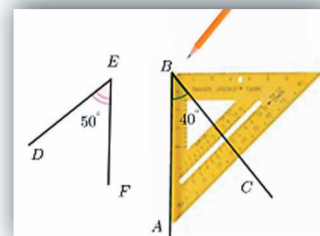


**b)** Priviți ceasurile la care limbile care indică ora și minutul formează unghiuri drepte (cu măsura de  $90^\circ$ ), respectiv unghiuri alungite (cu măsura de  $180^\circ$ ). Observați că secundarul formează cu acestea câte două unghiuri pentru care suma măsurilor este de  $90^\circ$ , respectiv de  $180^\circ$ . Cum se numesc două unghiuri pentru care suma măsurilor este de  $90^\circ$  și cum se numesc două unghiuri pentru care suma măsurilor este de  $180^\circ$ ?

**A2. a)** Construiți pe caiet, urmând indicațiile din figurile alăturate, suplementul, respectiv complementul unghiului  $ABC$  și arătați că este congruent cu unghiul  $DEF$ .

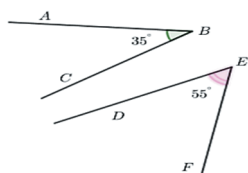


**c)** Ce proprietate au unghiurile cu același suplement sau cu același complement ?



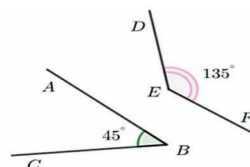
1. Unghiurile alungite și unghiurile nule sunt **unghiuri improprii**. Oricare unghi diferit de unghiul alungit sau de unghiul nul este **unghi propriu**.
2. Două unghiuri cu suma măsurilor egală cu  $90^\circ$  se numesc **unghiuri complementare** (fiecare dintre cele două unghiuri este **complementul** celuilalt).
3. Două unghiuri cu suma măsurilor egală cu  $180^\circ$  se numesc **unghiuri suplementare** (fiecare dintre cele două unghiuri este **suplementul** celuilalt).

**Exemple:**



a)  $\sphericalangle B + \sphericalangle E = 35^\circ + 55^\circ = 90^\circ$ ;

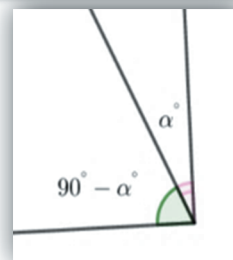
b)  $\sphericalangle B + \sphericalangle E = 45^\circ + 135^\circ = 180^\circ$



**4. Dacă două unghiuri ascuțite sunt congruente, atunci și complementele lor sunt congruente.**

*Demonstrație.* Într-adevăr, dacă măsura celor două unghiuri congruente este de  $\alpha^\circ$ , atunci măsura fiecărui complement este de  $90^\circ - \alpha^\circ$ , deci și complementele sunt congruente.

În același mod se justifică și proprietatea reciprocă: **Dacă două unghiuri ascuțite au complementele congruente, atunci și ele sunt congruente.**



**5. Dacă două unghiuri sunt congruente, atunci și suplementele lor sunt congruente.**  
Reciproc: **Dacă două unghiuri au suplementele congruente, atunci și ele sunt congruente.**



Să vedem ce am înțeles



1. Să calculăm măsura complementului unui unghi de măsură:  $12^\circ, 24^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 66^\circ, 78^\circ$ , apoi să calculăm măsura suplementului unui unghi de măsură:  $20^\circ, 160^\circ, 45^\circ, 135^\circ, 60^\circ, 120^\circ, 30^\circ, 150^\circ$ .
2. Să găsim unghiul care are aceeași măsură ca și complementul / suplementul său.



Învățăm să rezolvăm



1. Unghiurile  $A$  și  $B$  sunt complementare, iar măsura unghiului  $B$  este cu  $15^\circ$  mai mare decât măsura unghiului  $A$ . Determinați măsurile unghiurilor  $A$  și  $B$ .

**Rezolvare:** Unghiurile  $A$  și  $B$  sunt complementare, adică  $\sphericalangle A + \sphericalangle B = 90^\circ$  (1). Cum  $\sphericalangle B = \sphericalangle A + 15^\circ$ , prin înlocuirea în (1), obținem  $\sphericalangle A + \sphericalangle A + 15^\circ = 90^\circ \Rightarrow 2 \cdot \sphericalangle A = 75^\circ \Rightarrow \sphericalangle A = 37^\circ 30'$  și  $\sphericalangle B = 37^\circ 15' + 15^\circ = 52^\circ 30'$ .

2. Unghiurile  $M$  și  $N$  sunt suplementare, iar măsura unghiului  $N$  este de 4 ori mai mare decât măsura unghiului  $M$ . Determinați măsurile unghiurilor  $M$  și  $N$ .

**Rezolvare:** Unghiurile  $M$  și  $N$  sunt suplementare, adică  $\sphericalangle M + \sphericalangle N = 180^\circ$  (1).

Cum  $\sphericalangle N = 4 \cdot \sphericalangle M$ , prin înlocuirea în (1), obținem  $\sphericalangle M + 4 \cdot \sphericalangle M = 180^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow 5 \cdot \sphericalangle M = 180^\circ \Rightarrow \sphericalangle M = 36^\circ$  și  $\sphericalangle N = 4 \cdot 36^\circ = 144^\circ$ .

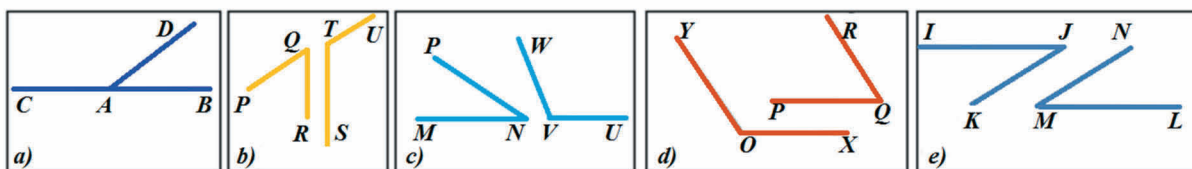


Acum să rezolvăm singurii!

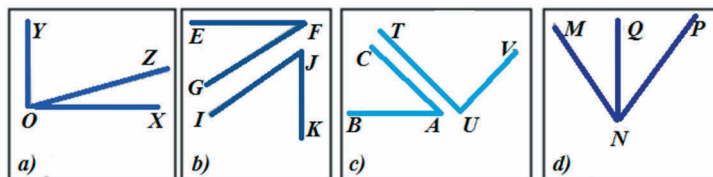
1. Scrie perechile de unghiuri complementare, știind că:  $\sphericalangle A = 30^\circ$ ,  $\sphericalangle B = 45^\circ$ ,  $\sphericalangle C = 60^\circ$ ,  $\sphericalangle D = 25^\circ 30'$ ,  $\sphericalangle E = 45^\circ$ ,  $\sphericalangle F = 64^\circ 30'$ ,  $\sphericalangle G = 34^\circ 27'$  și  $\sphericalangle H = 55^\circ 33'$ .
2. Scrie perechile de unghiuri suplementare, știind că:  $\sphericalangle A = 120^\circ$ ,  $\sphericalangle B = 37^\circ 40'$ ,  $\sphericalangle C = 60^\circ$ ,  $\sphericalangle D = 85^\circ 48'$ ,  $\sphericalangle E = 142^\circ 20'$  și  $\sphericalangle F = 94^\circ 12'$ .
3. Unghiurile din perechile:  $\sphericalangle A$  și  $\sphericalangle P$ ,  $\sphericalangle B$  și  $\sphericalangle Q$ , respectiv  $\sphericalangle C$  și  $\sphericalangle R$  sunt complementare. Află măsurile unghiurilor  $P$ ,  $Q$  și  $R$ , știind că:  $\sphericalangle A = 60^\circ$ ,  $\sphericalangle B = 42^\circ$ ,  $\sphericalangle C = 37^\circ 43'$ .
4. Unghiurile din perechile  $\sphericalangle M$  și  $\sphericalangle U$ ,  $\sphericalangle N$  și  $\sphericalangle V$ , respectiv  $\sphericalangle P$  și  $\sphericalangle W$  sunt suplementare.
5. Află măsurile unghiurilor  $U$ ,  $V$  și  $W$ , știind că:  $\sphericalangle M = 120^\circ$ ,  $\sphericalangle N = 150^\circ$ ,  $\sphericalangle P = 165^\circ 34'$ .
6. Unghiurile  $ABC$  și  $CBD$  sunt complementare și au aceeași măsură  $x$ . Află măsura  $x$ , comună unghiurilor  $ABC$  și  $CBD$ .
7. Unghiurile  $BAC$  și  $CAD$  sunt suplementare și au aceeași măsură  $y$ . Află măsura  $y$ , comună unghiurilor  $BAC$  și  $CAD$ .
8. Unghiurile  $A$  și  $B$  au același suplement, unghiul  $M$ . Știind că  $\sphericalangle M = 128^\circ$ , află măsurile unghiurilor  $A$  și  $B$ . Ce poți afirma despre două unghiuri care au același suplement?
9. Unghiurile  $C$  și  $D$  au același complement, unghiul  $P$ . Știind că  $\sphericalangle P = 27^\circ 35'$ , află măsurile unghiurilor  $C$  și  $D$ . Ce poți afirma despre două unghiuri care au același complement?
10. Unghiurile  $A$  și  $B$  sunt suplementare, iar măsura unghiului  $B$  este cu  $45^\circ$  mai mare decât măsura unghiului  $A$ . Află măsurile unghiurilor  $A$  și  $B$ .
11. Unghiurile  $P$  și  $Q$  sunt complementare, iar raportul măsurilor unghiurilor  $P$  și  $Q$  este  $\frac{2}{3}$ .

\*\*\* Află măsurile unghiurilor  $P$  și  $Q$ .

11. Identifică perechile de unghiuri suplementare din figurile următoare:



12. Identifică perechile de unghiuri complementare din configurațiile următoare:



13. Unghiurile din perechile  $A$  și  $M$ , respectiv  $B$  și  $N$  sunt suplementare, iar  $\sphericalangle A = \sphericalangle B = x$ . Demonstrează că  $\sphericalangle M \equiv \sphericalangle N$ .
14. Formulează aceeași problemă pentru perechile de unghiuri complementare  $C$  și  $P$ , respectiv  $D$  și  $Q$ .
15. Arată că, dacă două unghiuri sunt complementare, atunci ele sunt unghiuri ascuțite.

## LECȚIA 2. Unghiuri adiacente; bisectoarea unui unghi



Atenție, începem!

**A1. a)** Indicați (precizând poziția, de la stânga la dreapta) ceasurile la care secundarul din interiorul unghiului format de limbile care indică ora și minutele, formează cu acestea două unghiuri situate de o parte și alta a sa și precizați cum se numesc aceste perechi de unghiuri proprii astfel formate;



**b)** Indicați ceasurile la care unghiurile formate de secundar cu limbile care indică ora și minutele, sunt unghiuri adiacente complementare și respectiv unghiuri adiacente suplementare;

**c)** Identificați ceasul la care cele două unghiuri adiacente formate de secundar cu limbile care indică ora și minutele au măsurile egale. Cum se numește, în acest caz, semidreapta secundar pentru unghiul format de limbile care indică ora și minutele?

**A2.** Prin plierea hârtiei, astfel încât laturile unghiului  $ABC$  să se suprapună, se obține semidreapta  $BD$ , cu originea în vârful unghiului, situată în interiorul unghiului și care formează cu laturile acestuia,



unghiurile adiacente  $ABD$  și  $CBD$  de măsuri egale. Este  $BD$  bisectoarea unghiului  $ABC$ ? **a)** Care este poziția semidreptei  $BD$  față de unghiul  $ABC$ ? **b)** Comparați unghiurile  $ABD$  și  $CBD$ .

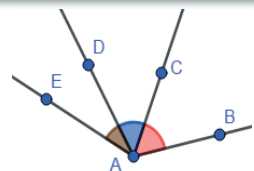


Ce ne învață teoria?

**1.** Două unghiuri proprii, care au

- același vârf,
- o latură comună și
- celelalte două laturi de o parte și de alta a dreptei suport pentru latura comună, se numesc **unghiuri adiacente**.

**Exemplu:** În figura alăturată unghiurile  $BAC$  și  $CAD$  sunt adiacente,  $CAD$  și  $DAE$  sunt tot adiacente. Dar unghiurile  $BAC$  și  $DAE$  nu sunt adiacente, deoarece nu au o latură comună.



**2. Bisectoarea** unui unghi propriu este semidreapta cu originea în vârful unghiului, inclusă în interiorul unghiului și care formează unghiuri congruente cu laturile acestuia.

**Exemplu:** În figura 1, semidreapta  $BD$  este bisectoarea unghiului  $ABC$ .

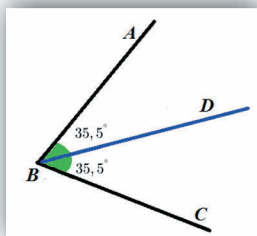


Fig. 1

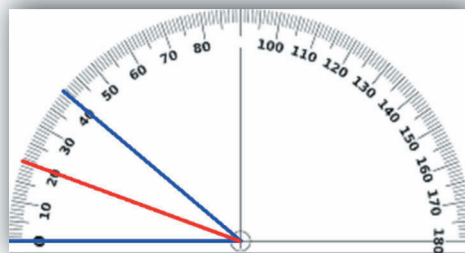


Fig. 2

### 3. Construcția bisectoarei unui unghi cu ajutorul raportorului (figura 2)

- Măsurăm unghiul ( $40^\circ$ );
- Calculăm jumătate din măsură, așezând raportorul ca în figura 2) ( $20^\circ$ ), adică marcăm punctul din dreptul măsurii înjumătățite;
- Cu ajutorul riglei, construim semidreapta din vârful unghiului ce trece prin acest punct.

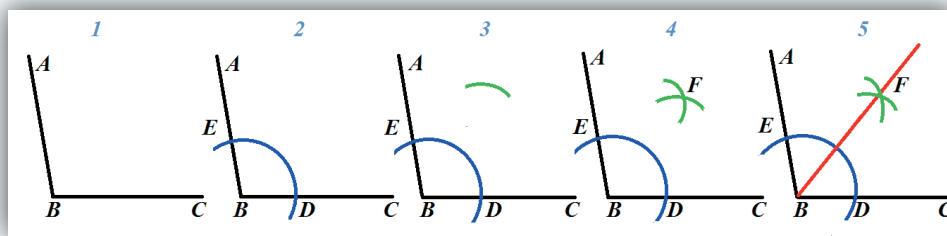


Să vedem ce am înțeles

### 4. Construcția bisectoarei unui unghi cu rigla negradată și cu compasul

Să construim bisectoarea cu rigla și compasul.

1. Să desenăm unghiul propriu  $ABC$ .
2. Cu acul compasului în  $B$ , să trasăm un arc care taie laturile unghiului în  $D$  și  $E$ .
3. Cu acul compasului în  $D$ , trasăm un arc în interiorul unghiului.
4. Cu acul compasului în  $E$  (și aceeași deschidere a compasului), tăiem ultimul arc, în  $F$ .
5. Unim  $B$  cu  $F$  și am obținut bisectoarea unghiului  $ABC$ . Să verificăm cu compasul.



Învățăm să rezolvăm

1. Se consideră unghiurile adiacente  $BAC$  și  $CAD$ , astfel încât  $\sphericalangle BAD = 80^\circ$ . Știind că  $\sphericalangle CAD = 3 \cdot \sphericalangle BAC$ , determinați măsurile unghiurilor  $BAC$  și  $CAD$ .

**Ipoteză:**  $\sphericalangle BAC, \sphericalangle CAD$  adiacente;  $\sphericalangle BAD = 80^\circ; \sphericalangle CAD = 3 \cdot \sphericalangle BAC$ .

**Concluzie:**  $\sphericalangle BAC = ?; \sphericalangle CAD = ?$

**Demonstrație:**  $\sphericalangle BAC, \sphericalangle CAD$  adiacente  $\Rightarrow \sphericalangle BAC + \sphericalangle CAD = \sphericalangle BAD \Rightarrow \sphericalangle BAC + \sphericalangle CAD = 80^\circ$ . Înlocuim în această relație  $\sphericalangle CAD = 3 \cdot \sphericalangle BAC$  și obținem  $\sphericalangle BAC + 3 \cdot \sphericalangle BAC = 80^\circ \Rightarrow \sphericalangle BAC = 20^\circ$  și  $\sphericalangle CAD = 3 \cdot 20^\circ = 60^\circ$ .

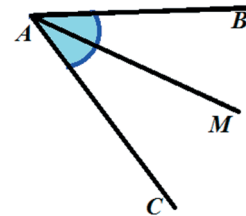
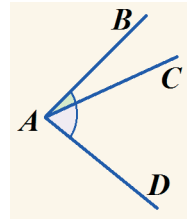
2. Se consideră  $\sphericalangle BAC = 76^\circ$  și bisectoarea acestuia  $AM$ . Aflați măsura unghiului format de bisectoarea  $AM$  cu una dintre laturile unghiului.

**Ipoteză:**  $\sphericalangle BAC = 76^\circ; AM$  bisectoarea  $\sphericalangle BAC$ .

**Concluzie:**  $\sphericalangle BAM = ?$

**Demonstrație:**

$AM$  bisectoarea  $\sphericalangle BAC \Rightarrow \sphericalangle BAM = \sphericalangle MAC = \frac{\sphericalangle BAC}{2} = \frac{76^\circ}{2} = 38^\circ$ .



1. Scrie perechile de unghiuri adiacente din configurațiile reprezentate în figura 1.

2. Explică de ce perechile de unghiuri  $CAM$  și  $CBN$ , respectiv  $BAD$  și  $CAD$  din figura 2, nu sunt adiacente.

3. Construiește unghiurile adiacente  $BAC$  și  $CAD$ , dacă:

a)  $\sphericalangle BAC = 20^\circ; \sphericalangle CAD = 35^\circ$ ;

b)  $\sphericalangle BAC = 115^\circ; \sphericalangle CAD = 57^\circ$ .

4. Construiește unghiurile adiacente complementare  $XOU$  și  $UOY$ , știind că:

a)  $\sphericalangle XOU = 50^\circ$ ;

b)  $\sphericalangle UOY = 75^\circ$ ;

c)  $\sphericalangle XOU = \sphericalangle UOY$ .

5. Construiește unghiurile adiacente suplementare  $AIC$  și  $CIB$ , știind că:

a)  $\sphericalangle AIC = 75^\circ$ ;

b)  $\sphericalangle CIB = 120^\circ$ ;

c)  $\sphericalangle AIC = \sphericalangle CIB$ .

6. Dacă unghiurile  $XOY$  și  $YOZ$  sunt adiacente suplementare, ce poți afirma despre punctele  $X, O$  și  $Z$ ?

7. Construiește bisectoarea unghiului  $BAC$ , știind că:

a)  $\sphericalangle BAC = 84^\circ$ ;

b)  $\sphericalangle BAC = 45^\circ$ ;

c)  $\sphericalangle BAC = 90^\circ$

8. Construiește un unghi  $XOY$ , știind că bisectoarea sa  $OI$  formează cu latura: a)  $OX$  un unghi cu măsura de  $30^\circ$ ; b)  $OY$  un unghi cu măsura de  $27^\circ$ ; c)  $OY$  un unghi cu măsura de  $45^\circ$ .

9. Observă pătratul  $ABCD$  din desenul alăturat și precizează dacă: a)  $AD$  este bisectoarea unghiului  $BAD$ ; b)  $CA$  este bisectoarea unghiului  $BCD$ ; c)  $BD$  este bisectoarea unghiului  $ABC$ ; d)  $DB$  este bisectoarea unghiului  $ADC$ . Verifică afirmațiile, măsurând unghiurile cu raportorul.

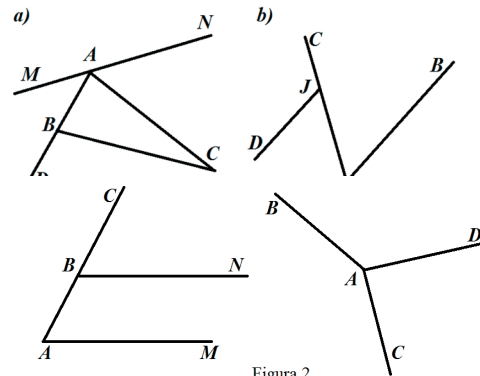


Figura 2

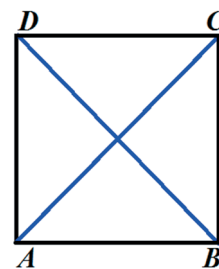


Figura 3

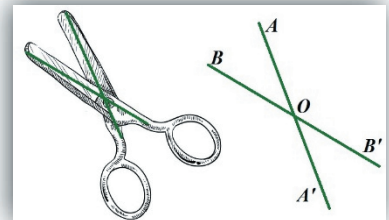
### LECȚIA 3. Unghiuri opuse la vârf. Unghiuri formate în jurul unui punct



Atenție, începem!

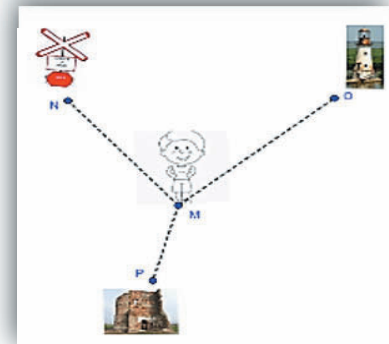
**A1. a)** Priviți foarfeca deschisă, precizați câte perechi de unghiuri congruente, cu același vârf, s-au format și pozițiile laturilor unghiurilor din aceeași pereche.

**b)** Dreptele  $AA'$  și  $BB'$  concurente în  $O$ , determină perechile de unghiuri congruente  $AOB$  și  $A'OB'$ , respectiv  $AOB'$  și  $A'OB$ , cu proprietatea că laturile unuia dintre unghiuri sunt semidreptele opuse semidreptelor care formează celălalt unghi din pereche. Cum se numesc perechile de unghiuri cu această proprietate?



**A2. Dan**, aflat în punctul  $M$ , trasează trei semidrepte imaginare, de origine  $M$  și extremități punctele:  $N$  (semnalizatorul de cale ferată),  $O$  (un far) și  $P$  (ruinele unei biserici). Numiți cele trei unghiuri astfel formate și precizați:

**a)** dacă interioarele oricărei perechi dintre cele trei unghiuri, au puncte comune; **b)** dacă reuniunea celor trei unghiuri cu interioarele lor este întreg planul; **c)** cum se numesc unghiurile care îndeplinesc condițiile: au același vârf; două câte două nu au puncte interioare comune; reuniunea cu interioarele lor este întreg planul; **d)** cu cât este egală suma măsurilor unghiurilor în jurul unui punct ?



Ce ne învață teoria?

**1.** Două unghiuri cu același vârf și cu laturile perechi de semidrepte opuse se numesc **unghiuri opuse la vârf**.

**Exemplu:** În figura de la **A1**, unghiurile  $AOB$  și  $A'OB'$  sunt opuse la vârf.

**2. Dacă două unghiuri sunt opuse la vârf, atunci ele sunt congruente.**

**Justificare:** Într-adevăr, dacă unghiurile  $AOB$  și  $A'OB'$  sunt opuse la vârf, atunci perechile:  $OA$  și  $OA'$ , respectiv  $OB$  și  $OB'$ , sunt de semidrepte opuse. Deci, perechile de unghiuri:  $AOB$  și  $A'OB'$ , respectiv  $AOB'$  și  $A'OB$  sunt de unghiuri suplementare. Cum unghiurile  $AOB$  și  $A'OB'$  au același suplement, ele sunt congruente.

3. Trei sau mai multe unghiuri cu același vârf, fără puncte interioare comune și care reunite cu interioarele lor dau întreg planul, se numesc **unghiuri în jurul unui punct**.

**Exemplu:** Unghiurile  $OMP$ ,  $PMN$ ,  $NMO$  din desenul de la **A2** sunt unghiuri în jurul punctului  $M$ .

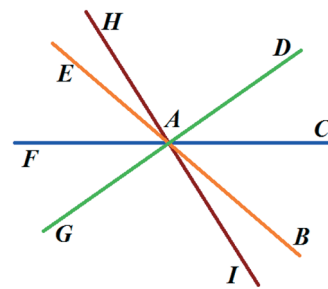
4. **Suma măsurilor unghiurilor formate în jurul unui punct este egală cu  $360^\circ$ .**



Să vedem ce am înțeles

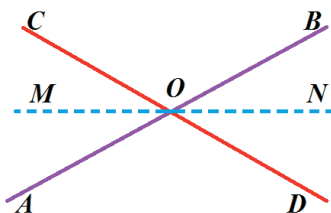
Pentru figura alăturată, să scriem:

- Perechi de unghiuri opuse la vârf;
- Triplete de unghiuri formate în jurul unui punct;
- Perechi de unghiuri care nu sunt opuse la vârf;
- Cvartete de unghiuri care nu sunt unghiuri în jurul unui punct.



Învățăm să rezolvăm

1. Se consideră unghiurile  $AOC$  și  $BOD$  opuse la vârf. Dacă  $OM$  este bisectoarea unghiului  $AOC$  și  $ON$  este semidreapta opusă lui  $OM$ , arătați că  $ON$  este bisectoarea unghiului  $BOD$ .



**Ipoteză:**  $\sphericalangle AOC$ ,  $\sphericalangle BOD$  opuse la vârf;  $OM$  bisectoarea  $\sphericalangle AOC$ ;  $OM$  și  $ON$  semidrepte opuse.

**Concluzie:**  $ON$  este bisectoarea  $\sphericalangle BOD$ .

**Demonstrație:**  $\sphericalangle AOC$ ,  $\sphericalangle BOD$  opuse la vârf  $\Rightarrow \sphericalangle AOC \equiv \sphericalangle BOD$ ;

Dacă  $OM$  bisectoarea  $\sphericalangle AOC \Rightarrow \sphericalangle AOM \equiv \sphericalangle MOC$  (1).

$OM$  și  $ON$  semidrepte opuse  $\Rightarrow$  punctele  $M, O, N$  coliniare și  $\sphericalangle AOM$ ,

$\sphericalangle BON$  opuse la vârf. Deci  $\sphericalangle AOM \equiv \sphericalangle BON$  (2). Analog se arată că  $\sphericalangle MOC \equiv \sphericalangle NOD$  (3).

Din relațiile (1), (2) și (3) obținem  $\sphericalangle BON \equiv \sphericalangle NOD \Rightarrow ON$  este bisectoarea  $\sphericalangle BOD$ .

2. Fie  $O$  un punct situat pe segmentul  $AA'$  și  $B, B'$  două puncte de o parte și de alta a dreptei  $AA'$ .

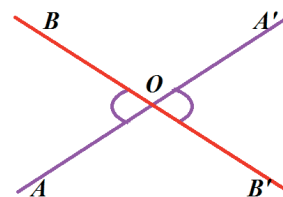
a) Dacă  $\sphericalangle AOB \equiv \sphericalangle A'OB'$ , atunci semidreptele  $OB$  și  $OB'$  sunt opuse;

b) Dacă două unghiuri congruente  $AOB$  și  $A'OB'$  au laturile  $OA, OA'$  semidrepte opuse, iar  $OB, OB'$  sunt de o parte și de alta a dreptei  $AA'$ , atunci cele două unghiuri sunt opuse la vârf.

**Ipoteză:** a)  $O \in AA'$ ;  $B, B'$  de o parte și de alta a dreptei  $AA'$ ;

$\sphericalangle AOB \equiv \sphericalangle A'OB'$ ; b)  $\sphericalangle AOB \equiv \sphericalangle A'OB'$ ;  $OA, OA'$  semidrepte opuse;  $OB, OB'$  de o parte și de alta a dreptei  $AA'$ .

**Concluzie:** a)  $OB, OB'$  semidrepte opuse; b)  $\sphericalangle AOB, \sphericalangle A'OB'$  sunt opuse la vârf.





**Demonstrație:** a)  $\sphericalangle A'OB' + \sphericalangle BOA' = 180^\circ \Rightarrow \sphericalangle BOB' = 180^\circ$ . Deci  $OB, OB'$  sunt semidrepte opuse. b) aceeași rezolvare ca la punctul a).

**Observație:** Aceste enunțuri formează **teoremele reciproce ale unghiurilor opuse la vârf**.



1. Observă configurațiile din figura 1 și selectează afirmațiile adevărate:

- a) Unghiurile  $AOB$  și  $A'OB'$  sunt opuse la vârf;
- b) Unghiurile  $ETD$  și  $FTC$  sunt opuse la vârf;
- c) Unghiurile  $AOB'$  și  $A'OB$  nu sunt opuse la vârf;
- d) Unghiurile  $ETF$  și  $CTD$  nu sunt opuse la vârf.

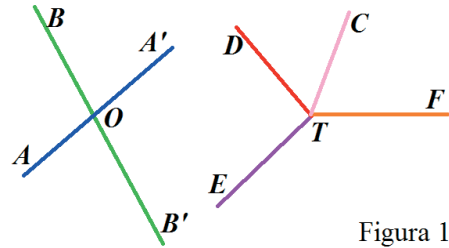


Figura 1

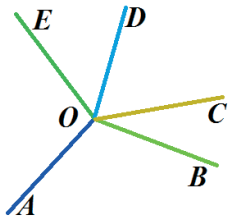


Figura 2

2. Observă figura 2 și selectează afirmațiile adevărate:

- a) unghiurile  $AOB, BOC, COD, DOE$  și  $AOE$  sunt unghiuri în jurul unui punct;
- b) unghiurile  $AOB, BOC, COD$  și  $DOE$  nu sunt unghiuri în jurul unui punct;
- c) unghiurile  $AOB, BOD$  și  $AOE$  nu sunt unghiuri în jurul unui punct;
- d) unghiurile  $AOC, COE$  și  $AOE$  sunt unghiuri în jurul unui punct;
- e) unghiurile  $AOC, BOD, DOE$  și  $AOE$  sunt unghiuri în jurul unui punct.

3. a) Reprodu în caiet desenul alăturat (figura 3);  
 b) Scrie unghiul opus la vârf unghiului  $AOC$ , apoi scrie încă trei perechi de unghiuri opuse la vârf;  
 c) Determină măsurile unghiurilor  $FOD, COF$  și  $AOD$ ;  
 d) Trasează bisectoarele unghiurilor  $AOC$  și  $BOC$  și arată că acestea formează un unghi drept.

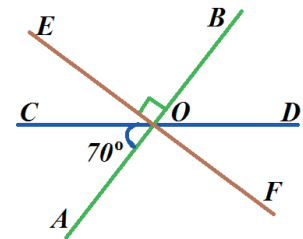
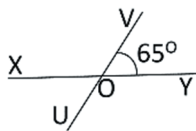
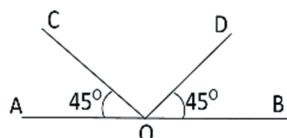


Figura 3

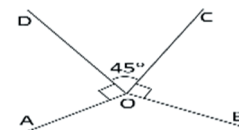
4. Cu notațiile din desenul alăturat determină măsurile unghiurilor  $XOU$  și  $XOV$ .



5. Cu notațiile din desenul alăturat, determină măsura unghiului  $COD$ .



6. Cu notațiile din desenul alăturat determină măsura unghiului  $AOB$ .



7. În triunghiul  $ABC$ , punctul  $M$  aparține laturii  $BC$ , astfel încât  $\sphericalangle BAM = 28^\circ$  și  $\sphericalangle MAC = 52^\circ$ . Bisectoarea unghiului  $BAM$  intersectează latura  $BC$  în punctul  $D$ , iar bisectoarea unghiului  $MAC$  intersectează latura  $BC$  în punctul  $E$ . Află măsura unghiului  $DAE$ .

8. În triunghiul  $BAC$ , punctul  $M$  aparține laturii  $BC$ . Trasează bisectoarele unghiurilor  $AMB$  și  $AMC$  și arată că acestea formează un unghi drept.

9. Măsurile a trei unghiuri în jurul unui punct sunt direct proporționale cu numerele 7, 11 și 12. Află măsurile celor trei unghiuri.

Modelează următorul scenariu: Titlul „Unghiuri”, un personaj folosind deplasările desenează o pereche de unghiuri opuse la vârf și spune „Acestea sunt unghiuri opuse la vârf”. Apoi șterge desenul și repetă cu unghiuri adiacente.

### Teste la final de unitate

#### Test de autoevaluare

Copiază și completează tabelul cu litera corespunzătoare răspunsului corect și vei obține un cuvânt surpriză:

1	2	3	4	5	6	7

1. Complementul unghiului cu măsura de  $80^\circ$  are măsura de

a)	b)	c)	d)
$6^\circ$	$16^\circ$	$176^\circ$	$166^\circ$

2. Bisectoarele a două unghiuri adiacente cu măsurile de  $74^\circ$  și, respectiv  $16^\circ$  formează un unghi cu măsura de

s)	t)	u)	v)
$45^\circ$	$29^\circ$	$16^\circ$	$34^\circ$

3. Bisectoarele a două unghiuri opuse la vârf formează un unghi

a)	b)	c)	d)
ascuțit	nul	alungit	propriu

4. O semidreaptă inclusă în interiorul unui unghi și cu originea în vârful unghiului, formează cu laturile acestuia unghiuri cu măsurile  $42^\circ$ , respectiv  $17^\circ$ . Atunci măsura unghiului este

s)	t)	u)	v)
$48^\circ$	$73^\circ$	$59^\circ$	$123^\circ$

5. O semidreaptă inclusă în exteriorul unui unghi, cu originea în vârful unghiului, formează cu laturile acestuia unghiuri cu măsurile  $152^\circ$ , respectiv  $143^\circ$ . Atunci măsura unghiului este

t)	ț)	u)	v)
$275^\circ$	$65^\circ$	$95^\circ$	$9^\circ$

6. Suma măsurilor suplementelor a două unghiuri este  $148^\circ$ . Atunci suma măsurilor unghiurilor este

g)	h)	i)	j)
$360^\circ$	$32^\circ$	$212^\circ$	$90^\circ$

7. Diferența dintre măsura suplementului unui unghi și a complementului altui unghi este de  $137^\circ$ . Diferența măsurilor celor două unghiuri este

t)	u)	v)	w)
$47^\circ$	$147^\circ$	$223^\circ$	$43^\circ$



### Testul 1

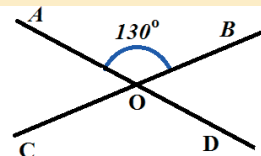
Se acordă 10p din oficiu

#### I. Pe foaia de rezolvare, în spațiile punctate, scrie cuvintele sau rezultatele care fac enunțurile adevărate.

- 10p 1. Dacă două unghiuri au suma măsurilor egală cu  $180^\circ$ , acestea se numesc ... .  
 10p 2. Două unghiuri cu același vârf și care au laturile în prelungire se numesc ... .  
 10p 3. Bisectoarea unui unghi propriu este semidreapta cu originea în vârful unghiului, situată în interiorul acestuia și care formează cu laturile unghiului inițial ....

#### II. Pe foaia de rezolvare, scrie numai litera răspunsului corect, știind că doar unul dintre cele patru răspunsuri este corect.

- 10p 1. Unghiurile  $AOC$  și  $BOD$  din figura alăturată sunt:  
 a) obtuze;                      b) opuse la vârf;  
 c) adiacente;                  d) drepte.
- 10p 2. Suplementul unghiului  $AOD$  are măsura de:  
 a)  $50^\circ$ ;                      b)  $60^\circ$ ;                      c)  $40^\circ$ ;                      d)  $130^\circ$ .
- 10p 3. Bisectoarea unghiului  $BOD$  formează cu semidreapta  $OD$  un unghi de:  
 a)  $50^\circ$ ;                      b)  $65^\circ$ ;                      c)  $25^\circ$ ;                      d)  $35^\circ$ .



#### III. Pe foaia de rezolvare, scrie rezolvările complete, pentru următoarele exerciții:

- 5p 1. a) Se consideră două unghiuri adiacente, suplementare  $AOB$  și  $BOC$ . Determinați măsurile celor două unghiuri știind că măsura unghiului  $AOB$  este de două ori mare decât măsura unghiului  $BOC$ . b) Desenați cele două unghiuri și bisectoarele acestora și determinați măsura unghiului format de acestea.
- 5p 2. Se consideră dreapta  $AB$ , punctul  $O$  situat între  $A$  și  $B$  și punctele  $P$  și  $Q$  de o parte și de alta a dreptei  $AB$ , astfel încât  $\sphericalangle POB = 81^\circ$ , iar  $\sphericalangle BOQ = 99^\circ$ . Realizați desenul și aflați măsura unghiului  $AOQ$ .
- 10p 3. Se consideră perechile de unghiuri adiacente:  $AOB$ ,  $BOC$ , respectiv  $BOC$  și  $COD$ . Știind că  $\sphericalangle AOB = 72^\circ 10'$  și  $\sphericalangle COD = 65^\circ 20'$ , aflați măsura unghiului  $BOC$ , astfel încât punctele  $A, O$  și  $D$  să fie coliniare și realizați desenul corespunzător.