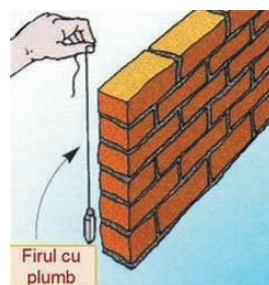


Unitatea de învățare: Perpendicularitate

LECȚIA 4. Drepte perpendiculare în plan. Mediatoarea unui segment

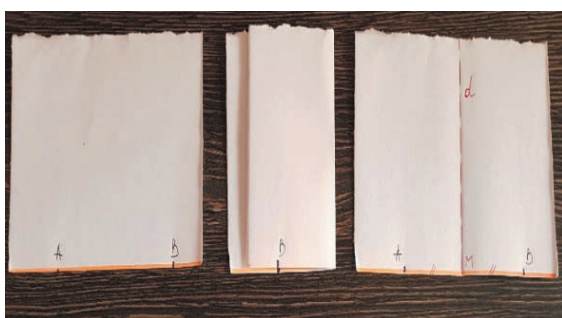


A1. În imaginea alăturată, firul cu plumb formează cu linia de bază a zidului un unghi drept și este folosit pentru a determina verticalitatea acestuia, iar dreptele de pe tapetul aplicat pe perete formează patru unghiuri drepte în jurul unui punct.



- a) Cum se numesc două drepte concurente care formează un unghi drept?
- b) Cum se numesc două drepte care nu sunt perpendiculare?

A2. Trasați o dreaptă d , considerați un punct M nesituat pe dreapta d și un punct N situat pe dreapta d . Cu ajutorul unui echer care are un unghi drept, duceți perpendicularele prin M și, respectiv, prin N pe d . Câte perpendiculare se pot duce printr-un punct la o dreaptă? Cum se numește punctul de intersecție a perpendicularei cu dreapta d ?



A3. Pe lungimea unei coli $A4$, marcați două puncte, A și B , ca în imaginea dată și pliați foaia, astfel încât punctele A și B să se suprapună după îndoire. Notați cu d dreapta după care ați realizat pliarea și cu M intersecția dreptelor d și AB .

a) Precizați poziția dreptelor d și AB , una față de cealaltă, și poziția punctului M pe segmentul AB ;

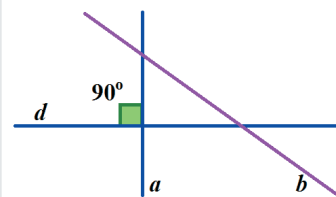
b) Cum se numesc punctele A și B situate de o parte și de alta a dreptei d , dacă dreptele d și AB sunt perpendiculare, iar punctul lor de intersecție este mijlocul lui AB ? Mijlocul M al segmentului AB este centrul de simetrie al capetelor segmentului?

c) Cum se numește perpendiculara pe mijlocul unui segment? Este mediatoarea unui segment axa de simetrie a segmentului?



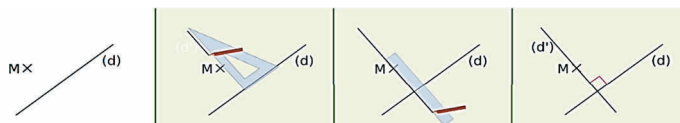
Ce ne învață teoria?

1. Două drepte concurente și care formează un unghi de 90° se numesc **drepte perpendiculare**. Două drepte perpendiculare formează patru unghiuri drepte.
2. Două drepte concurente care nu sunt perpendiculare se numesc **oblice**.



Exemplu: Dacă dreptele a și d sunt perpendiculare, notăm $a \perp d$.

3. Construcții geometrice



Construcția cu echerul și cu rigla a unei perpendiculare dintr-un punct exterior pe o dreaptă

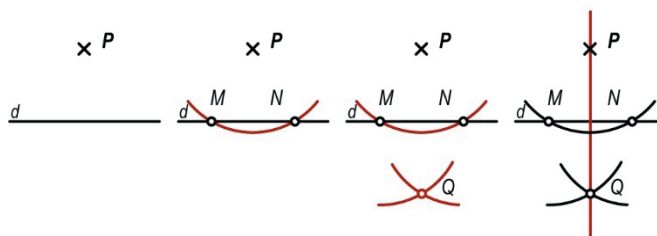
Pasul 1. Așezăm echerul, astfel încât una dintre laturile unghiului drept să fie pe dreapta d și cealaltă să fie pe punctul M .

Pasul 2. Trasăm dreapta care conține punctul M .

Pasul 3. Continuăm dreapta dincolo de M , cu ajutorul unei rigle.

Pasul 4. Notăm cu P punctul de intersecție a perpendicularei cu dreapta d , pe care îl numim **piciorul perpendicularei**. Lungimea segmentului MP este **distanța de la punctul M la dreapta d** . **Observație:** Analog se construiește perpendiculara într-un punct al dreptei d .

Construcția cu compasul și cu rigla ne-gradată a unei perpendiculare dintr-un punct exterior pe o dreaptă

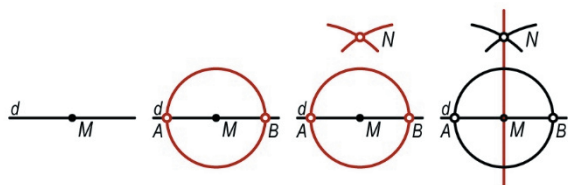


Pasul 1. Cu acul compasului în P construim un arc de cerc care intersectează dreapta d în punctele M și N .

Pasul 2. Cu acul compasului în M și N și cu aceeași deschidere a compasului trasăm două arce de cerc care se intersectează în Q .

Pasul 3. Trasăm cu rigla dreapta PQ , perpendiculara din P pe d .

Pasul 4. Notăm perpendiculara cu d' și marcăm unghiul drept.



Construcția cu compasul și cu rigla ne-gradată a unei perpendiculare pe o dreaptă într-un punct al ei

Pasul 1. Construim un cerc cu centrul în punctul M și care intersectează dreapta d în punctele A și B .

Pasul 2. Cu centrele în A și B și cu aceeași deschidere a compasului trasăm două arce de cerc care se intersectează în N .

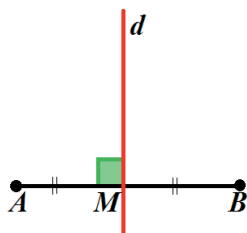
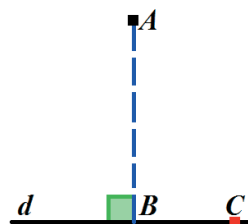
Pasul 3. Trasăm cu rigla dreapta MN , perpendiculara în M pe d .

Pasul 4. Notăm perpendiculara cu d' și marcăm unghiul drept.

4. Distanța de la un punct exterior la o dreaptă este lungimea segmentului determinat de punct și de piciorul perpendicularei din punct pe dreaptă.

Distanța de la un punct al dreptei la dreaptă este egală cu 0

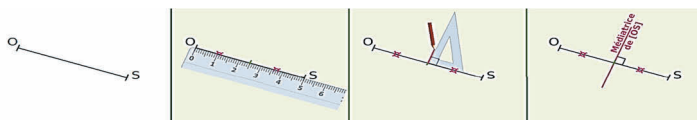
Exemplu: Considerăm punctele: $A \notin d, C \in d$. Dacă $AB \perp d, B \in d$, B se numește piciorul perpendicularei din A pe dreapta d . Distanța de la A la dreapta d este $d(A, d) = AB, d(C, d) = 0$.



5. Mediatoarea unui segment este dreapta perpendiculară pe segment și care trece prin mijlocul său.

Exemplu: Dreapta d perpendiculară pe segmentul AB , în mijlocul M al acestuia, este mediatoarea acestui segment.

6. Construcții geometrice
Construcția cu rigla și echerul a mediatoarei unui segment



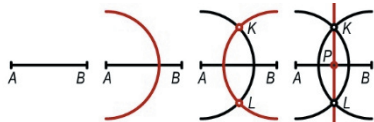
Pasul 1. Considerăm un segment OS de lungime dată, căruia îi marcăm mijlocul M .

Pasul 2. Construim, cu echerul, perpendiculara pe segmentul OS , în punctul M .

Pasul 3. Prelungim mediatoarea cu ajutorul unei rigle.

Pasul 4. Notăm mediatoarea, marcăm unghiul drept și segmentele congruente.

Construcția cu rigla negradată și compasul a mediatoarei unui segment



Pasul 1. Considerăm un segment AB și trasăm un arc de cerc cu centrul în punctul A .

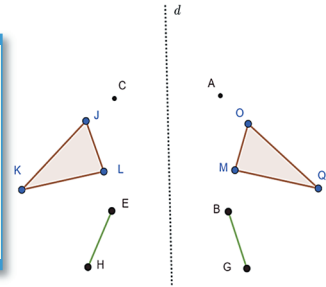
Pasul 2. Cu aceeași deschidere a compasului, trasăm un arc de cerc cu centrul în B . Dacă cele două arce de cerc nu se intersectează în două puncte distincte, atunci refacem construcția cu o deschidere mai mare a compasului.

Pasul 3. Trasăm cu rigla dreapta determinată de cele două puncte de intersecție ale arcelor.

Pasul 4. Notăm mediatoarea, marcăm unghiul drept și segmentele congruente.

7. Două puncte sunt *simetrice în raport cu o dreaptă*, numită *axă de simetrie*, dacă dreapta este mediatoarea segmentului determinat de cele două puncte.

8. Două *figuri geometrice sunt simetrice în raport cu o dreaptă*, dacă simetricul fiecărui punct al unei figuri aparține celeilalte.



Exemple: Punctele A și C , triunghiurile JKL și OQM , segmentele EH și BG sunt simetrice în raport cu dreapta d .



Să vedem ce am înțeles

Folosind numai rigla (negradată) și compasul, să desenăm cu grijă:

- Trei puncte A, B, C diferite și nesituate pe aceeași dreaptă.
- Mediatoarea segmentului AB și perpendiculara din C pe AB . Mediatoarea segmentului AB și perpendiculara din C pe AB sunt paralele?
- Mediatoarea segmentului AC și notăm cu O intersecția mediatoarelor segmentelor AB și AC ;
- Perpendiculara din O pe BC .



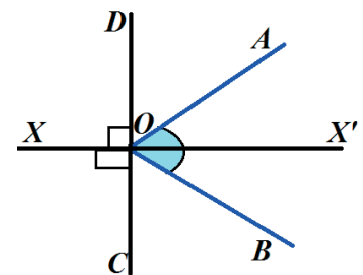
Învățăm să rezolvăm

1. Fie $\sphericalangle AOB$ ascuțit, OX bisectoarea sa și OX' semidreapta opusă acesteia. Prin O se duce perpendiculara pe OX pe care se iau punctele C și D , astfel încât O este situat între C și D , cu semidreptele OC și OD de aceeași parte a dreptei OX . Comparați:

a) $\sphericalangle BOC$ și $\sphericalangle AOD$; b) $\sphericalangle AOC$ și $\sphericalangle BOD$; c) $\sphericalangle AOX'$ și $\sphericalangle BOX'$.

Ipoteză: $\sphericalangle AOB$ ascuțit; OX bisectoarea $\sphericalangle AOB$; OX și OX' semidrepte opuse; $OC \perp OX$; $D \in OC$, O între C și D .

Concluzie: a) $\sphericalangle BOC$ și $\sphericalangle AOD$; b) $\sphericalangle AOC$ și $\sphericalangle BOD$; c) $\sphericalangle AOX'$ și $\sphericalangle BOX'$.



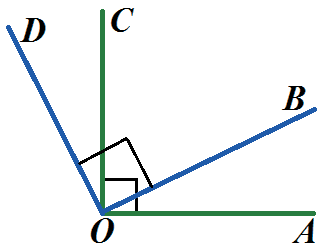
Demonstrație:

a) $OC \perp OX \Rightarrow \sphericalangle DOX = \sphericalangle COX = 90^\circ \Rightarrow \sphericalangle AOD = \sphericalangle DOX} - \sphericalangle AOX = 90^\circ - \sphericalangle AOX$,
 $\sphericalangle BOC = \sphericalangle COX} - \sphericalangle BOX = 90^\circ - \sphericalangle BOX$, dar OX bisectoarea $\sphericalangle AOB \Rightarrow \sphericalangle AOX = \sphericalangle BOX$,
 deci $\sphericalangle BOC = \sphericalangle AOD$.

b) $\sphericalangle AOC = \sphericalangle COX} + \sphericalangle AOX = 90^\circ + \sphericalangle AOX}$ și $\sphericalangle BOD = \sphericalangle DOX} + \sphericalangle BOX = 90^\circ$, iar
 $\sphericalangle AOX = \sphericalangle BOX$, deci $\sphericalangle AOC \equiv \sphericalangle BOD$.

c) $\sphericalangle AOX' = \sphericalangle XOX'} - \sphericalangle AOX = 180^\circ - \sphericalangle AOX}$ și $\sphericalangle BOX' = \sphericalangle XOX'} - \sphericalangle BOX = 180^\circ - \sphericalangle BOX}$,
 iar $\sphericalangle AOX = \sphericalangle BOX$, deci $\sphericalangle AOX' = \sphericalangle BOX'$.

2. Demonstrați că două unghiuri cu același vârf și cu laturile respectiv perpendiculare sunt congruente dacă ambele sunt ascuțite sau obtuze.



Ipoteză: $\sphericalangle AOB, \sphericalangle COD$ ascuțite sau obtuze;

$OC \perp OA; OD \perp OB$.

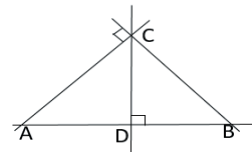
Concluzie: $\sphericalangle AOB \equiv \sphericalangle COD$.

Demonstrație: Considerăm desenul alăturat unde unghiurile sunt ascuțite și avem: $\sphericalangle AOB = \sphericalangle AOC - \sphericalangle BOC = 90^\circ - \sphericalangle BOC$ și $\sphericalangle COD = \sphericalangle BOD - \sphericalangle BOC = 90^\circ - \sphericalangle BOC$, deci $\sphericalangle AOB \equiv \sphericalangle COD$.

Dacă ambele unghiuri sunt obtuze, avem: $\sphericalangle AOB = \sphericalangle AOC + \sphericalangle BOC = 90^\circ + \sphericalangle BOC$ și $\sphericalangle COD = \sphericalangle BOD + \sphericalangle BOC = 90^\circ + \sphericalangle BOC$, deci $\sphericalangle AOB \equiv \sphericalangle COD$.



1. Reprodu desenul alăturat, scrie perechile de drepte perpendiculare și perechile de drepte oblice.



2. Desenează o dreaptă d , un punct A pe această dreaptă și un punct B exterior ei. **a)** Construiește cu ajutorul echerului perpendicularele în A și din B , pe dreapta d ; **b)** Construiește un punct care se află la distanța de 3,5 cm de dreapta d .

3. **a)** Desenează un pătrat și scrie patru perechi de drepte perpendiculare corespunzătoare desenului realizat. Trasează diagonalele pătratului și precizează poziția acestora, una față de cealaltă și poziția lor față de laturile pătratului;

b) Desenează un dreptunghi și scrie patru perechi de drepte perpendiculare corespunzătoare desenului realizat. Trasează diagonalele dreptunghiului și precizează poziția acestora, una față de cealaltă, și poziția lor față de laturile dreptunghiului;

c) Desenează un cub $ABCD A' B' C' D'$. Determină distanța de la punctul A la dreapta BC , de la punctul A' la dreapta AB , de la punctul C la dreapta DD' ;

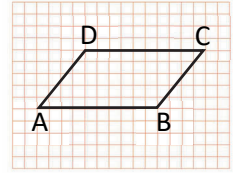
d) Desenează un paralelipiped dreptunghic $MNPQM'N'P'Q'$. Determină distanța de la punctul Q la dreapta NP , de la punctul M' la dreapta $Q'P'$, de la punctul Q la dreapta MM' ;

e) Desenează o piramidă cu baza un pătrat $ABCD$ și vârful V . Precizează poziția, una față de cealaltă, a dreptelor: VB și BC , VA și VD , AB și AD .

4. **a)** Desenează o dreaptă a și un punct A exterior ei; **b)** Trasează perpendiculara prin A pe dreapta a și notează piciorul acesteia pe a cu B ; **c)** Trasează o oblică la dreapta a , prin A , și notează intersecția lor cu C ; **d)** Compară distanța de la punctul A la dreapta a cu lungimea segmentului AC de pe oblica dusă la punctul c).

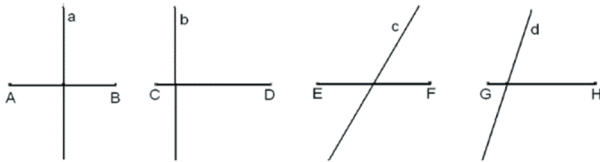


5. a) Desenează o dreaptă a și fixează un punct O pe ea; b) Trasează perpendiculara prin O la dreapta a și indică piciorul perpendicularei; c) Trasează o oblică la dreapta a , prin punctul O și precizează poziția acesteia față de perpendiculara dusă prin O la a ; d) Printr-un punct P al dreptei a , diferit de O , trasează o perpendiculară pe a și precizează poziția acesteia față de perpendiculara dusă prin O pe a .



6. Reprodu paralelogramul din desenul alăturat și precizează:

- a) distanța de la D la AB , știind că piciorul perpendicularei din D pe AB este E ;
 b) distanța de la D la BC , știind că piciorul perpendicularei din D pe BC este F ;
 c) distanța de la C la AB , știind că piciorul perpendicularei din C pe AB este G ;
 d) distanța de la A la BC , știind că piciorul perpendicularei din A pe BC este H .



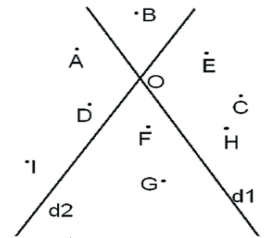
7. Identifică segmentul și mediatoarea sa din figurile geometrice alăturate.

8. Construiește un segment de 6 cm și mediatoarea acestuia.

9. Desenează o dreaptă d și un punct A exterior ei. Construiește segmentul AB , astfel încât dreapta d să fie mediatoarea acestuia.

10. Completează spațiile libere, urmărind notațiile din figura alăturată.

- a) Simetricul lui A în raport cu d_1 este ...;
 b) Punctele A și C sunt simetrice în raport cu ...;
 c) Simetricul lui E în raport cu d_1 este ...;
 d) Simetricul lui F în raport cu d_2 este ...;
 e) Simetricul lui O în raport cu d_1 este ...;
 f) Simetricul punctelor H și I în raport cu d_1 , respectiv d_2 , este ...



Teste la final de unitate

Test de autoevaluare

Copiază și completează tabelul cu litera corespunzătoare răspunsului corect și vei obține un cuvânt surpriză.

1	2	3	4	5

1. Mediatoarea unui segment este

o)	p)	q)	r)
paralelă cu segmentul	identică cu segmentul	oblică pe segment	perpendiculară pe segment

2. Dintr-un punct exterior unei drepte se pot coborî perpendiculare pe dreaptă

h)	i)	j)	k)
exact două, dar paralele	exact una	niciuna	exact două, dar în prelungire

3. Pentru a desena mediatoarea unui segment cu ajutorul riglei și al compasului, construim un număr de arce egal cu

d)	e)	f)	g)
0	1	2	3

4. Simetricul lui A față de mediatoarea MN a segmentului AB este

i)	j)	k)	l)
A	M	N	B

5. Distanța de la A la mediatoarea MN a segmentului AB , care intersectează AB în P , este

z)	a)	b)	c)
AM	AP	AB	AN



Testul 1

Se acordă 10p din oficiu

I. Pe foaia de rezolvare, în spațiile punctate, scrie cuvintele sau rezultatele care fac enunțurile adevărate.

- 10p 1. Două drepte concurente care formează un unghi drept se numesc
- 10p 2. Lungimea segmentului care unește punctul cu piciorul perpendicularei duse din acel punct pe dreaptă este ... de la un punct la o dreaptă.
- 10p 3. Printr-un punct exterior unei drepte sau printr-un punct care aparține dreptei se poate duce o singură ... la acea dreaptă.

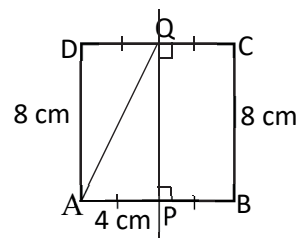
II. Pe foaia de rezolvare, scrie numai litera răspunsului corect știind că doar unul dintre cele patru răspunsuri este corect.

- 10p 1. Fie un segment AB și d mediatoarea sa, iar $d \cap AB = \{O\}$. Dacă $OB = 6$ cm, atunci lungimea segmentului AB este egală cu:
a) 12cm; b) 6cm; c) 14cm; d) 8cm.
- 10p 2. Semidreptele OA și OB sunt perpendiculare. Bisectoarea unghiului AOB formează cu cele două semidrepte unghiuri cu măsura de:
a) 90° ; b) 180° ; c) 45° ; d) 55° .
- 10p 3. Se consideră un pătrat $ABCD$ cu latura de 3 cm. Distanța de la punctul B la dreapta AD este de:
a) 6cm; b) 2cm; c) 4cm; d) 3cm.

III. Pe foaia de rezolvare, scrie rezolvările complete, pentru următoarele exerciții:

- 10p 1. Desenați: un segment AB cu lungimea de 6 cm, mediatoarea segmentului AB și un punct P situat la distanța de 4 cm față de dreapta AB .

- 10p 2. Folosind notațiile din desenul alăturat, în care $ABCD$ este un pătrat, scrieți: a) mediatoarea segmentului AB ; b) lungimea distanței de la Q la BC ; c) o dreaptă perpendiculară pe AB ; d) o dreaptă oblică față de PQ ; e) simetricul punctului C în raport cu dreapta PQ .



- 10p 3. Fie $\sphericalangle AOB$ ascuțit, dreptele $OM \perp OA$ și $ON \perp OB$, astfel încât punctele M și N sunt de aceeași parte a dreptei OB . Arătați că bisectoarele unghiurilor AOB și MON sunt perpendiculare.



Testul 2

Se acordă 10p din oficiu

I. Pe foaia de rezolvare, scrie cuvintele sau rezultatele care, înscrise în spațiile punctate, formează enunțuri adevărate.

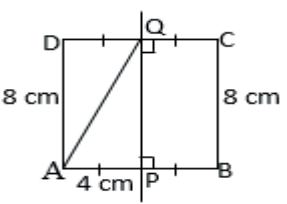
- 10p 1. Două drepte concurente care nu sunt perpendiculare se numesc
- 10p 2. Intersecția dintre o dreaptă și perpendiculara pe aceasta, dusă dintr-un punct exterior ei, se numește ... perpendicularei.
- 10p 3. Dreapta perpendiculară pe un segment, dusă prin mijlocul acestuia, se numește

II. Pe foaia de rezolvare, scrie numai litera răspunsului corect, știind că doar unul dintre cele patru răspunsuri este corect.

- 10p 1. Cele două segmente în care mediatoarea împarte un segment de 18 cm au lungimea de:
a) 18 cm; b) 6 cm; c) 9 cm; d) 16 cm.
- 10p 2. Fie un punct A situat la distanța de 4,5 cm față de o dreaptă d și A' simetricul său în raport cu dreapta d . Distanța de la A' la dreapta d este de:
a) 9 cm; b) 4,5 cm; c) 4 cm; d) 8 cm.
- 10p 3. Suma măsurilor a trei dintre cele patru unghiuri formate în jurul unui punct de două drepte perpendiculare este de:
a) 180° ; b) 90° ; c) 360° ; d) 270° .

III. Pe foaia de rezolvare, scrie pentru următoarele exerciții, rezolvările complete.

- 10p 1. Desenați: o dreaptă d , un punct M situat la distanța de 3 cm față de d și simetricul lui M în raport cu dreapta d .

- 10p  2. Folosind notațiile din desenul alăturat, în care $ABCD$ este un pătrat, scrieți: a) mediatoarea segmentului DC ; b) lungimea distanței de la C la AB ; c) o dreaptă perpendiculară pe AD ; d) o dreaptă oblică față de CD ; e) simetricul punctului B față de dreapta PQ .

- 10p 3. Fie unghiul $\sphericalangle DOE$ ascuțit, $OM \perp OD$, $ON \perp OE$ astfel încât $\sphericalangle MON = 140^\circ$. Determinați măsura unghiului $\sphericalangle XOY$, dacă OX este bisectoarea $\sphericalangle MOD$ și OY este bisectoarea $\sphericalangle NOE$.