Teorema lui Thales

Segmente proporționale. Teorema paralelelor echidistante

Observă și descoperă!

1. În lipsa unui caiet de matematică, Sara a folosit un caiet dictando. La un caiet dictando, distanța dintre oricare două linii consecutive este aceeași. Sara a desenat o dreaptă f și a marcat pe ea punctele A, B, C și D, ca în *Figura 1*. Victor desenează alături dreapta g și marchează pe ea punctele M, N și P.

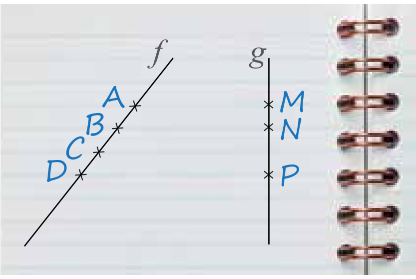


Figura 1

a) Dacă $AB = 2$ cm, ce lungime are segmentul BC? Dar segmentul BD?

b) Cu cât este egal raportul dintre lungimea segmentului AB și lungimea segmentului BD?

c) Fără a cunoaște lungimile segmentelor MN și NP, poți spune cât este raportul acestor lungimi?

Important

• Numim **paralele echidistante** trei sau mai multe drepte paralele pentru care distanța dintre oricare două drepte consecutive este mereu aceeași.

Exemplu: Liniile caietului dictando sunt paralele echidistante. Liniile portativului din caietul de muzică sunt paralele echidistante.

• Paralelele echidistante determină pe o dreaptă care le intersectează segmente congruente.

Exemplu: În Figura 1, $AB \equiv BC \equiv CD$.

• Dacă trei sau mai multe drepte paralele determină pe o secantă segmente congruente, atunci ele sunt paralele echidistante.

• Prin **raportul a două segmente** înțelegem raportul dintre lungimile celor două segmente măsurate cu aceeași unitate de măsură.

Exemplu: Dacă $AB = 4$ *cm și* $CD = 12$ *cm, atunci raportul dintre segmentele* AB *și* CD *este* $\frac{AB}{CD} = \frac{4\ cm}{12\ cm} = \frac{1}{3}$ *(am simplificat prin 4 și prin cm).*

Să observăm că:

▷ Raportul a două segmente este un număr; nu depinde de unitatea de măsură.

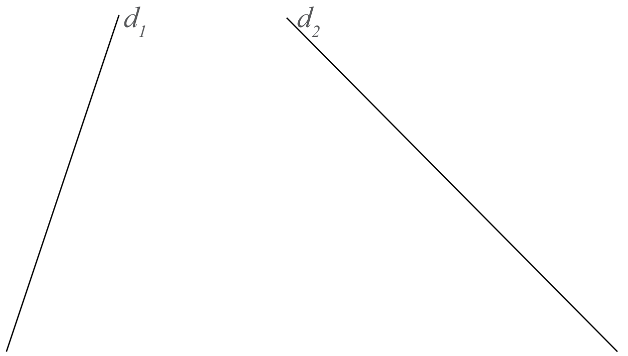
▷ Dacă $\frac{AB}{CD} = \frac{2}{3}$ nu înseamnă că $AB = 2$ cm și $CD = 3$ cm. Putem spune $AB = 32$ cm și $CD = 48$ cm sau $AB = 2$ km și $CD = 3$ km. În general, avem $AB = 2k$ și $CD = 3k$, unde k este factorul prin care s-a simplificat.

• Numim **segmente proporționale** patru segmente cu lungimile cărora se poate forma o proporție.

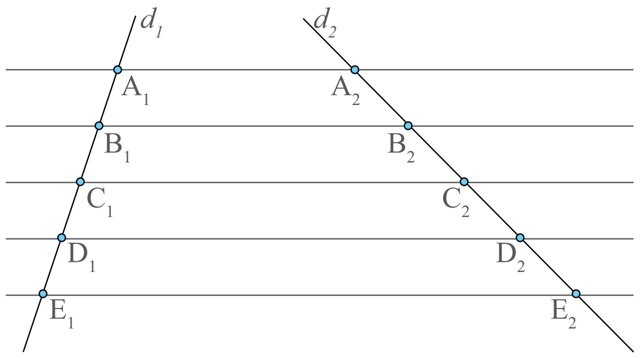
Exemplu: Se consideră segmentele $AB = 6$ *cm,* $CD = 8$ *cm,* $EF = 15$ *cm și* $GH = 20$ *cm. Numerele* 6, 8, 15 *și* 20 *sunt numere proporționale deoarece* $6 \cdot 20 = 8 \cdot 15$. *Atunci segmentele* AB, CD, EF *și* GH *sunt segmente proporționale. Putem forma, de exemplu, proporția* $\frac{AB}{CD} = \frac{EF}{GH}$.

• Putem construi patru segmente proporționale cu ajutorul paralelelor echidistante.

Construim dreptele d_1 și d_2.



Construim paralelele echidistante A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2, D_1D_2 și E_1E_2.



Acum putem alege ca segmente proporționale segmentele A_1B_1, B_1E_1, A_2B_2 și B_2E_2.

Avem $\frac{A_1B_1}{B_1E_1} = \frac{1}{3}$ și $\frac{A_2B_2}{B_2E_2} = \frac{1}{3}$, adică $\frac{A_1B_1}{B_1E_1} = \frac{A_2B_2}{B_2E_2}$.

Puteam alege segmentele A_1D_1, A_1E_1, A_2D_2, și A_2E_2 dar și alte segmente.

Exersează!

2. Ştiind că dreptele orizontale din *Figura 2* sunt paralele echidistante, determină valoarea următoarelor rapoarte:

a) $\frac{AE}{EF}$; b) $\frac{AE}{EB}$; c) $\frac{EF}{AB}$; d) $\frac{CH}{HG}$; e) $\frac{DG}{CG}$; f) $\frac{DC}{GH}$.

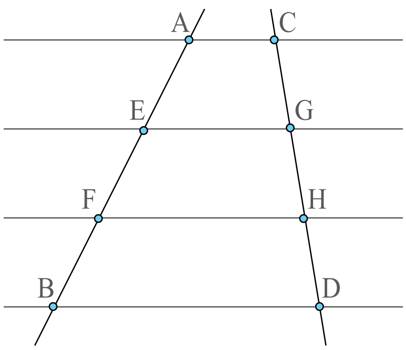


Figura 2

3. În *Figura 3*, dreptele d_1, d_2, d_3, d_4, d_5 și d_6 sunt paralele echidistante, iar dreptele AD și MQ sunt secante. Folosindu-te de noțiunile învățate, verifică dacă următoarele relații sunt adevărate:

a) $\frac{AB}{CD} = \frac{MN}{PQ}$; b) $\frac{AC}{BD} = \frac{NP}{MQ}$; c) $\frac{AB}{BD} = \frac{NM}{MP + PQ}$;

d) $\frac{BD}{AD} = \frac{MQ}{NQ}$; e) $AB \cdot PQ = CD \cdot MN$; f) $AC \cdot MQ = BD \cdot NP$.

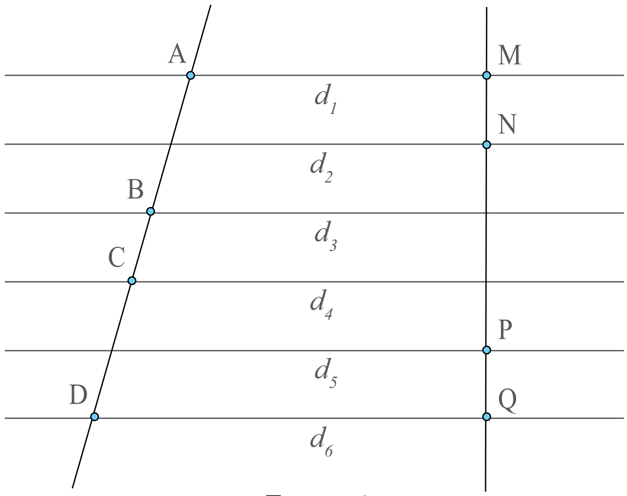


Figura 3

4. Știind că $d_1 \parallel d_2 \parallel d_3 \parallel d_4$ și d este o secantă, astfel încât $d \cap d_1 = \{A\}$, $d \cap d_2 = \{B\}$, $d \cap d_3 = \{C\}$ și $d \cap d_4 = \{D\}$, verifică dacă dreptele d_1, d_2, d_3 și d_4 sunt paralele echidistante, ţinând cont de informaţiile date, în fiecare caz:

a) $AB = 3$ cm, $BD = 6$ cm, iar C este mijlocul segmentului BD;
b) $AC = 2 \cdot AB$ și $BD = 2 \cdot CD$;
c) $AC = BD$ și $AC = 2 \cdot BC$.

5. Dacă dreptele orizontale sunt paralele echidistante şi $AM = PQ$, determină care dintre cele două trasee este mai lung, cel colorat cu roșu sau cel colorat cu galben, în fiecare dintre *Figurile 4-5*.

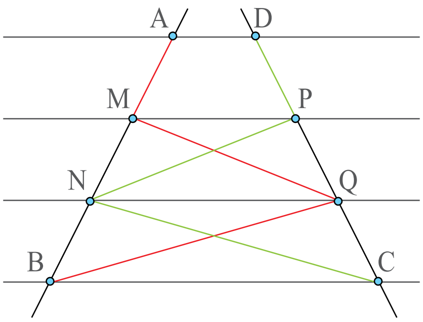


Figura 4

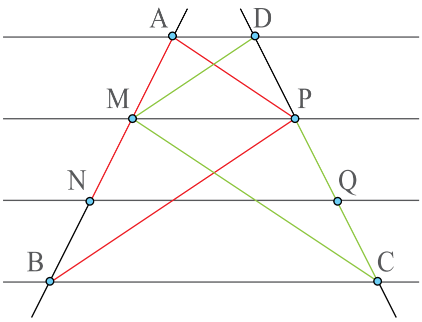


Figura 5

6. Se consideră $d \parallel e \parallel f$ și g o secantă astfel încât $g \cap d = \{A\}$, $g \cap e = \{B\}$ și $g \cap f = \{C\}$. Fie $BD \perp d, D \in d$ și $BE \perp f, E \in f$, precum în *Figura 6*. Folosește metoda triunghiurilor congruente pentru a arăta că dacă $BD = BE$, atunci $AB = BC$.

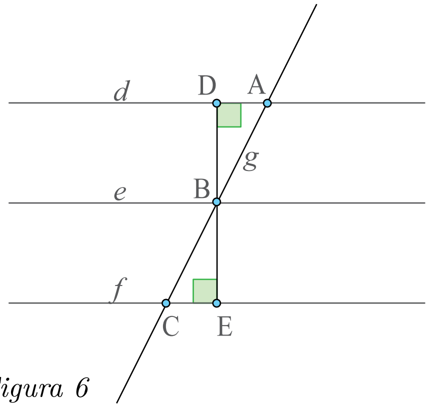


Figura 6

7. În *Imaginea 1*, este reprezentată o porțiune din harta cartierului West Manhattan a orașului New York din SUA. În imagine, apar străzi paralele echidistante, începând de la sud cu strada W 34th până în nord la strada W 42nd. Secantă cu toate aceste străzi este bulevardul Broadway, care este încadrat între bulevardele 7th Ave în vest și 6th Ave în est. Se mai cunoaște faptul că unghiul dintre orice stradă de tipul W și bulevardele 6th Ave, respectiv 7th Ave, este drept.

a) Ce poți spune despre cele 8 porțiuni ale bulevardului Broadway delimitate de străzile de tip W? Dar despre porțiunile din bulevardul Broadway și bulevardele 6th Ave și 7th Ave?

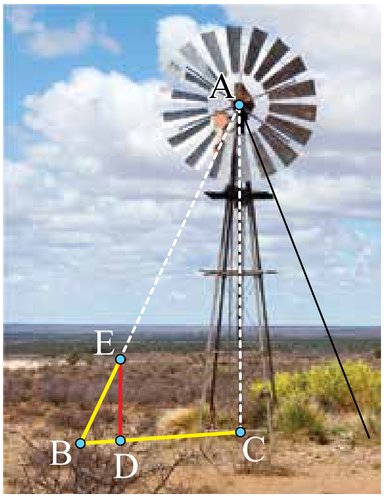
b) Notează acum cu N punctul care se află la intersecția dintre bulevardul 7th Ave și strada W 38th, cu Y punctul de la intersecția 6th Ave – W 38th, iar cu B_1, B_2, ..., B_9 punctele de la intersecțiile bulevardului Broadway cu străzile orizontale, începând cu W 34th, până la W 42nd. Dacă punctul B_5 este mijlocul străzii W 38th, demonstrează că patrulaterele NB_1YB_9, NB_2YB_8, NB_3YB_7 și NB_4YB_6 sunt paralelograme.

c) Dacă punctul T este la intersecția 7th Ave – W 42nd, iar punctul S la intersecția 6th Ave – W 34th, demonstrează că zona determinată de trapezul dreptunghic NTB_9B_5 are aceeași arie precum cea a zonei determinate de trapezul SYB_5B_1.

Imaginea 1 – Harta cartierului Manhattan

Teorema lui Thales. Împărțirea unui segment în părți proporționale cu numere date

Observă și descoperă!



Imaginea 2 – Un stâlp ancorat

1. *Imaginea 2* prezintă stâlpul AC susținut cu ajutorul unor ancore. Una dintre ele este AB. Din cauza uzurii, această ancoră trebuie schimbată, dar nimeni nu știe ce lungime are ancora AB.

Iată cum încearcă Victor să îl ajute pe tatăl său să determine lungimea ancorei! Măsoară distanța BC și găsește că este egală cu 4 m. La 1 m de punctul B, în punctul D înfige un țăruș și măsoară lungimea segmentului BE; o găsește de 2,5 m. Cu aceste date face o schiță pe o foaie de matematică, așa cum arată *Figura 7*.

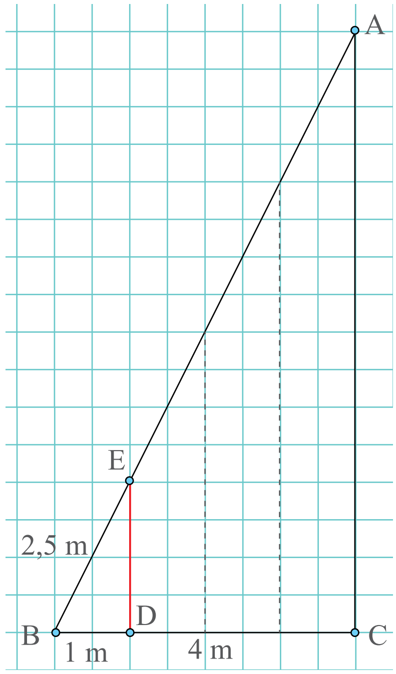
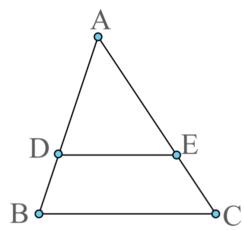


Figura 7

• Spune ce lungime are ancora AB, ținând cont de faptul că dreptele DE, AC și liniile punctate sunt paralele echidistante.

Important

• În orice triunghi, o paralelă la una dintre laturile triunghiului determină pe celelalte două laturi (sau pe prelungirile lor) segmente proporționale (Teorema lui Thales).

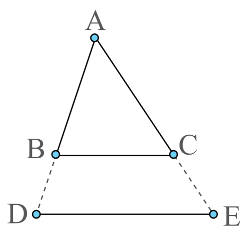


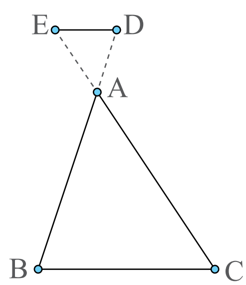
Cazul I. Paralela intersectează laturile.

$$DE \parallel BC \overset{\text{T.Thales}}{\underset{\triangle ABC}{\Rightarrow}} \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}.$$

Mai putem scrie $\dfrac{AD}{AB} = \dfrac{AE}{AC}$ sau $\dfrac{AB}{DB} = \dfrac{AC}{EC}$.

Cazul II. Paralela intersectează prelungirile laturilor.





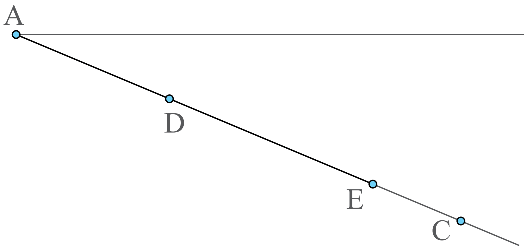
$$DE \parallel BC \overset{\text{T.Thales}}{\underset{\triangle ABC}{\Rightarrow}} \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}.$$

Mai putem scrie $\dfrac{AD}{AB} = \dfrac{AE}{AC}$ sau $\dfrac{AB}{DB} = \dfrac{AC}{EC}$.

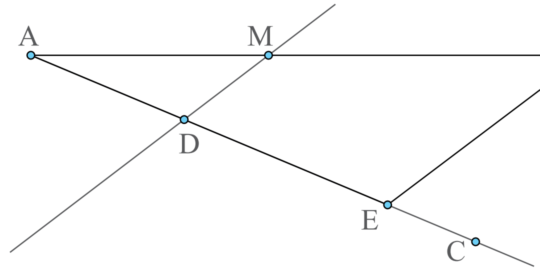
Exemplu: În Figura 7, în triunghiul ABC avem $DE \parallel AC$. Rezultă din teorema lui Thales $\dfrac{BD}{BC} = \dfrac{BE}{BA}$, adică $\dfrac{1}{4} = \dfrac{2{,}5}{BA}$, de unde $AB = 4 \cdot 2{,}5 = 10$ m.

● Cu ajutorul teoremei lui Thales putem împărți un segment în părți proporționale cu numere date.

Exemplu: Să împărțim un segment $AB = 10$ cm în două segmente AM și BM astfel încât $\dfrac{AM}{MB} = \dfrac{3}{4}$. Procedăm astfel:



Construim semidreapta AC pe care luăm segmentele $AD = 3$ cm și $DE = 4$ cm.



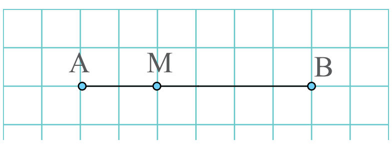
Unim punctele E și B. Paralela prin punctul D la EB intersectează segmentul AB în M punctul căutat.

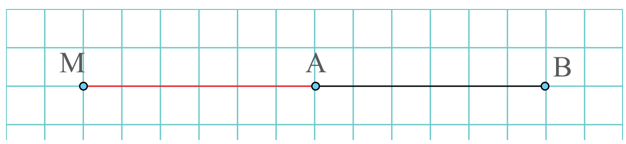
Justificare: În triunghiul ABE avem, $DM \parallel EB$.

Rezultă, din teorema lui Thales, că $\dfrac{AM}{MB} = \dfrac{AD}{DE}$. Dar $\dfrac{AD}{DE} = \dfrac{3 \text{ cm}}{4 \text{ cm}} = \dfrac{3}{4}$ și atunci $\dfrac{AM}{MB} = \dfrac{3}{4}$.

● Punctul care împarte un segment în părți proporționale cu două numere date este unic în interiorul segmentului. Mai există un punct în exteriorul segmentului care are aceeași proprietate, de aceea este important să precizăm dacă punctul este situat pe segment sau pe dreapta suport, în exteriorul segmentului.

Exemplu: În ambele situații reprezentate în figura de mai jos, $\dfrac{AM}{MB} = \dfrac{1}{2}$, *dar în primul caz punctul* M *este situat pe segment, iar în al doilea caz punctul* M *este situat pe dreapta suport, în exteriorul segmentului.*



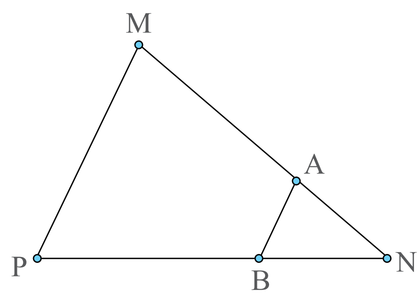


Exersează!

2. Se consideră triunghiul MNP cu $MN = 48$ mm, $NP = 60$ mm și $MP = 24$ mm și punctele $A \in MN, B \in NP$ și $C \in MP$.

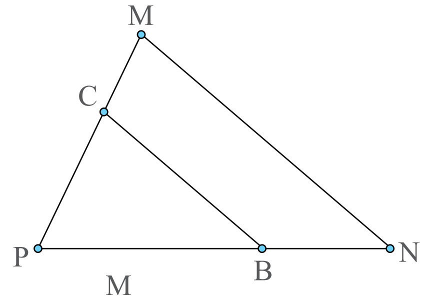
a) Dacă $AB \parallel MP$ și $AN = 16$ mm, determină lungimile segmentelor AM, BN și BP.

b) Dacă $AB \parallel MP$ și $BP = 10$ mm, determină lungimile segmentelor AN, AM și BN.



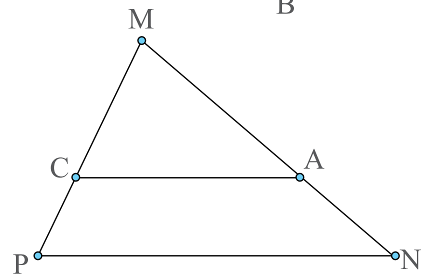
c) Dacă $BC \parallel MN$ și $BP = 24$ mm, determină lungimile segmentelor CP, CM și BN.

d) Dacă $BC \parallel MN$ și $CM = 18$ mm, determină lungimile segmentelor CP, BP și BN.



e) Dacă $AC \parallel NP$ și $AM = 2$ cm, determină lungimile segmentelor AN, CM și CP.

f) Dacă $AC \parallel NP$ și $CP = 2$ cm, determină lungimile segmentelor AM, AN și CM.



3. Împarte un segment cu lungimea de 11 cm în: a) 3 segmente congruente; b) 7 segmente congruente.

4. Se consideră triunghiul ascuțitunghic ABC în care $AB = 24$ mm și $AC = 32$ mm.

a) Dacă punctul M este în interiorul segmentului AB, astfel încât $\frac{AM}{MB} = \frac{1}{3}$, iar punctul N este pe dreapta AC, astfel încât $MN \parallel BC$, determină lungimile segmentelor AM, BM, AN și CN.

b) Aceleași cerințe pentru cazul în care punctul M aparține dreptei AB, dar nu și segmentului AB.

5. Se consideră trapezul $ABCD$, cu $AB \parallel CD$, $AB > CD$ și O punctul de intersecție a diagonalelor. a) Demonstrează că $OA \cdot OD = OB \cdot OC$.

b) Dacă $OA = 2x$, $OB = x - 4$, $OC = 16$ și $OD = 6$, determină valoarea lui x.

6. Se consideră trapezul $ABCD$, cu $AB \parallel CD$, $AB > CD$ și $AD \cap BC = \{V\}$.

Demonstrează că $\frac{VD}{VA} = \frac{VC}{VB}$.

7. Pentru a rostogoli bolovanul din *Figura 8*, cu ajutorul unei bare metalice, se formează o pârghie. Pârghia este eficientă dacă raportul între lungimea ei până la punctul de sprijun (AS) și lungimea ei totală (AT) este $\frac{1}{3}$. Dacă punctul de sprijin (P) se află la 0,8 m de bolovan, la ce distanță de bolovan stă muncitorul care acționează pârghia?

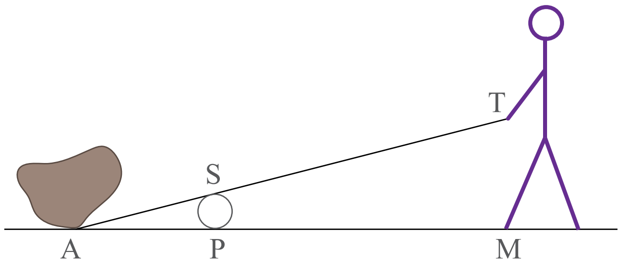


Figura 8

8. Se consideră triunghiul DEF și punctele $P \in DE$, $Q \in EF$ și $R \in DF$ astfel încât $PQ \parallel DF$ și $QR \parallel DE$. Demonstrează că $PD \cdot RD = RF \cdot PE$.

9. Știind că lungimea diagonalei unui pătrat este $l\sqrt{2}$, unde l reprezintă lungimea laturii pătratului, împarte un segment cu lungimea de $3\sqrt{2}$ cm în: a) 3 segmente congruente; b) 12 segmente congruente.

10. Se consideră triunghiul oarecare ABC și AD bisectoarea unghiului BAC, cu $D \in BC$. Paralela prin punctul B la AD intersectează dreapta AC în punctul E, ca în *Figura 9*.

a) Demonstrează că triunghiul ABE este isoscel cu $AB = AE$.

b) Aplică teorema lui Thales în triunghiul EBC și demonstrează că $\dfrac{AE}{AC} = \dfrac{BD}{DC}$.

c) Folosind rezultatele obținute anterior, verifică relația $\dfrac{BD}{DC} = \dfrac{AB}{AC}$ (*Teorema bisectoarei*).

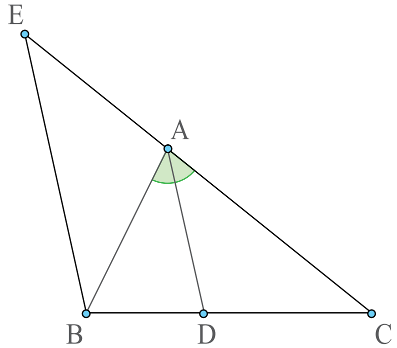


Figura 9

11. Se consideră triunghiul ABC, în care $AB = 12$ cm, $BC = 18$ cm și $CA = 24$ cm. Dacă AD este bisectoarea unghiului BAC, cu $D \in BC$, determină lungimile segmentelor BD și DC.

12. Se consideră triunghiul ABC, punctele $P \in AB$ și $Q \in AC$, astfel încât $\dfrac{AP}{BP} = \dfrac{CQ}{AQ} < 1$, M mijlocul laturii AB, N mijlocul laturii AC și $R \in AB$, astfel încât $RQ \parallel BC$, ca în *Figura 10*.

a) Arată că $BR = AP$, folosind teorema lui Thales.

b) Dacă $MN \cap PQ = \{S\}$, demonstrează că S este mijlocul segmentului PQ.

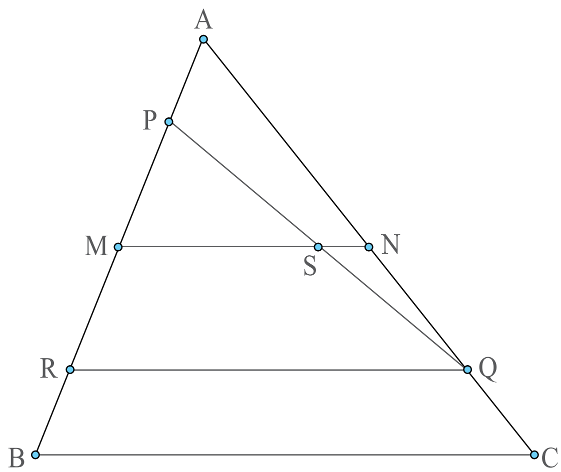


Figura 10

13. Se consideră triunghiul oarecare DEF și G centrul său de greutate. Dacă $GP \parallel DE$, $GQ \parallel EF$ și $GR \parallel DF$, cu $P \in EF, Q \in DF$ și $R \in DE$, arată că $\dfrac{DR}{RE} = \dfrac{EP}{PF} = \dfrac{FQ}{QD} = \dfrac{1}{2}$.

Reciproca teoremei lui Thales

Observă și descoperă!

1. Citește dialogul dintre cei doi copii, apoi răspunde la întrebări.

Sara: Știu de la Thales că dacă $DE \parallel BC$, atunci $\dfrac{AD}{DB} = \dfrac{AE}{EC}$. Cum ar fi invers? Dacă $\dfrac{AD}{DB} = \dfrac{AE}{EC}$, atunci $DE \parallel BC$.

Victor: Eu zic că nu este adevărat.

Sara: Bine, atunci eu construiesc prin punctul D o paralelă la BC care intersectează pe AC într-un punct F diferit de E, ca în *Figura 11*. Atunci $\dfrac{AD}{DB} = \dfrac{AF}{FC}$, dar cum $\dfrac{AD}{DB} = \dfrac{AE}{EC}$ rezultă $\dfrac{AF}{FC} = \dfrac{AE}{EC}$.

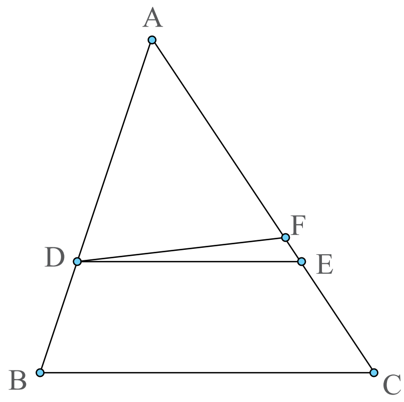


Figura 11

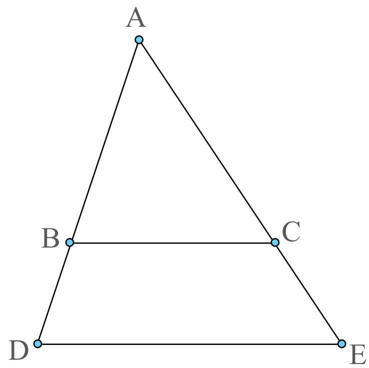
Victor: Asta înseamnă că există două puncte distincte pe segmentul AC care împart segmentul în același raport.

a) Este adevărată afirmația făcută de Victor?

b) Unde a greşit Victor?

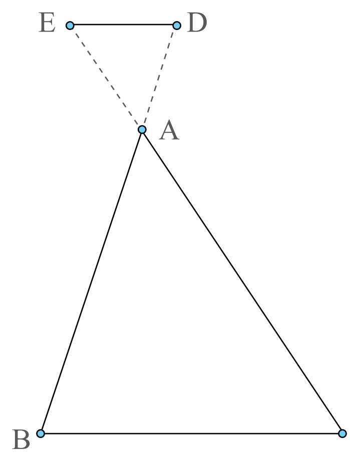
Important

• Dacă o dreaptă determină pe două dintre laturile unui triunghi (sau pe prelungirile acestora) segmente proporționale, atunci ea este paralelă cu a treia latură. (Reciproca teoremei lui Thales).



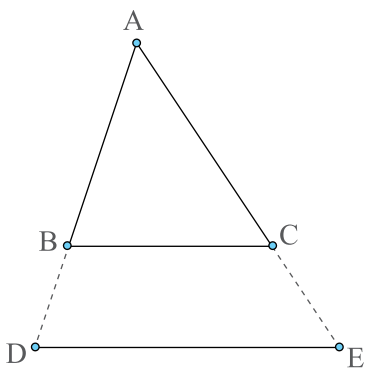
Dreapta intersectează prelungirile laturilor.

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} \overset{\text{R.Thales}}{\underset{\triangle ABC}{\Rightarrow}} DE \parallel BC$$



Dreapta intersectează laturile.

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} \overset{\text{R.Thales}}{\underset{\triangle ABC}{\Rightarrow}} DE \parallel BC$$



Exersează!

2. Se consideră triunghiul MNP, în care $MN = 30$ mm, $NP = 36$ mm și $MP = 24$ mm.

a) Dacă $A \in MN$, $B \in NP$ și $C \in MP$, astfel încât $AM = 5$ mm, $BN = 30$ mm, $CP = 4$ mm, arată că $AB \parallel MP$ și că $BC \parallel MN$.

b) Dacă $A \in (MN)$, $B \in (NP)$ și $C \in (MP)$, astfel încât $AM = 25$ mm, $BN = 30$ mm, $CM = 20$ mm, arată că $AC \parallel NP$ și că $BC \parallel MN$.

c) Dacă $A \in (MN)$, $B \in (NP)$ și $C \in (MP)$, astfel încât $AM = 5$ mm, $BN = 30$ mm, $CP = 20$ mm, arată că $AB \parallel MP$ și că $AC \parallel NP$.

3. Se consideră trapezul $ABCD$, cu $AB \parallel CD$, $AB > CD$, $AD = 24$ cm, $AB = 42$ cm, $BC = 16$ cm și $CD = 20$ cm, reprezentat în *Figura 12*. Punctele M și P sunt situate pe latura AD, astfel încât $AM = 12$ cm și $DP = 18$ cm, iar punctele N și Q sunt pe latura BC, astfel încât $CN = 8$ cm și $BQ = 4$ cm.

a) Arată că $MN \parallel AB$;

b) Demonstrează că $PQ \parallel AB$;

c) Calculează lungimea segmentului MN;

d) Calculează lungimea segmentului PQ;

e) Verifică dacă următoarele afirmații sunt adevărate: i) $\dfrac{AP}{PD} = \dfrac{BQ}{QC} = \dfrac{1}{3}$; ii) $PQ = \dfrac{AB \cdot 3 + CD \cdot 1}{3+1}$.

f) Demonstrează că $RS = \dfrac{AB \cdot 1 + CD \cdot 3}{1+3}$, unde R este mijlocul segmentului DM, iar S este mijlocul segmentului CN.

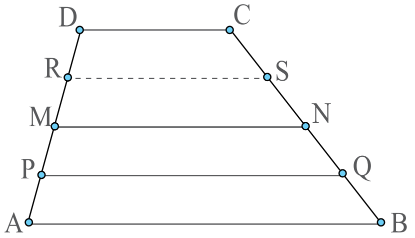


Figura 12

4. Se consideră triunghiul isoscel ABC, cu $AB = AC$ și fie punctele $M \in (AB)$ și $N \in (AC)$ astfel încât $AM = CN$. Dacă punctul P este simetricul punctului N față de mijlocul segmentului AC, demonstrează că $MP \parallel BC$.

5. Se consideră triunghiul ABC, cu $AB = 15$ cm, $AC = 20$ cm și $BC = 25$ cm și punctele $M \in AB$, $N \in AC$ și $P, Q \in BC$, astfel încât $AM = 3$ cm, $CN = 16$ cm, $BP = 5$ cm și $BQ = 20$ cm, ca în *Figura 13*. Demonstrează că:

a) $MN \parallel BC$;

b) $MQ \parallel AC$;

c) $NP \parallel AB$;

d) dacă $MQ \cap NP = \{O\}$, atunci $ON \cdot OQ = OM \cdot OP$.

• Calculează acum lungimea segmentului PQ și verifică, în acest caz, relația $PQ = BC - 2 \cdot MN$. Ce valoare ai obține pentru lungimea segmentului PQ, dacă $AM = 7{,}5$ cm și $AN = 10$ cm?

• Ce se întâmplă cu punctele P, O și Q în acest caz? Justifică răspunsul dat!

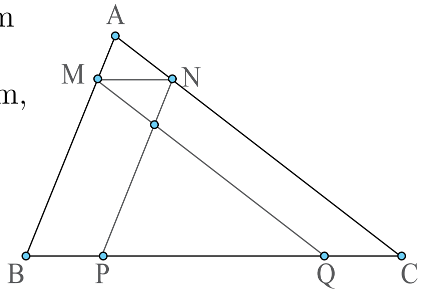


Figura 13

6. Se consideră patrulaterul convex $MNPQ$ și punctele $A \in MN$, $B \in NP$, $C \in PQ$ și $D \in MQ$, astfel încât $\dfrac{AM}{MN} = 1 - \dfrac{BN}{NP} = \dfrac{CP}{PQ} = 1 - \dfrac{DQ}{MQ}$. Demonstrează că patrulaterul $ABCD$ este un paralelogram.

Recapitulare

1. Dacă $ST = 30$ cm, iar $U \in ST$ astfel încât $\dfrac{US}{TU} = \dfrac{3}{2}$, ca în *Figura 14*, determină lungimile segmentelor US și UT pentru ambele poziții ale punctului U pe dreapta ST.

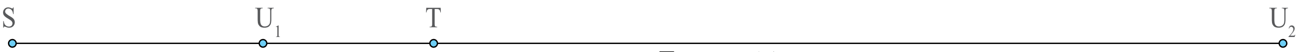


Figura 14

2. În *Figura 15* sunt patru drepte paralele echidistante și două secante oarecare. Determină valoarea rapoartelor:
a) $\dfrac{AB}{BD}$; b) $\dfrac{AC}{BD}$; c) $\dfrac{AD}{BC}$; d) $\dfrac{MN}{PQ}$; e) $\dfrac{NQ}{MN}$; f) $\dfrac{PN}{MQ}$.

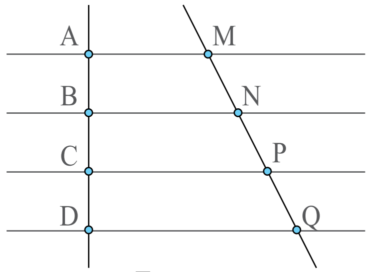


Figura 15

3. Se consideră triunghiul DEF, cu $DE = 40$ cm, $EF = 56$ cm și $DF = 24$ cm. Dacă $A, M \in DE$, astfel încât $AD = ME = 15$ cm, $B, N \in EF$, astfel încât $BE = FN = 21$ cm și $C, P \in DF$, astfel încât $CF = DP = 9$ cm, demonstrează că $AP \parallel EF$, $BM \parallel DF$ și $CN \parallel DE$.

4. Împarte un segment de 7 cm în: a) 3 segmente congruente; b) 5 segmente congruente; c) 7 segmente congruente; d) 14 segmente congruente; e) 11 segmente congruente.

5. Se consideră dreptunghiul $ABCD$, M un punct pe dreapta AB astfel încât $B \in AM$ și fie $CM \cap AD = \{N\}$. Demonstrează că: a) $\dfrac{MB}{BA} = \dfrac{MC}{CN}$; b) $\dfrac{ND}{DA} = \dfrac{NC}{CM}$; c) $\dfrac{MB}{BA} \cdot \dfrac{ND}{DA} = 1$; d) $\dfrac{MB}{AM} = \dfrac{MC}{MN}$; e) $\dfrac{ND}{AN} = \dfrac{CN}{MN}$; f) $\dfrac{MB}{AM} + \dfrac{ND}{AN} = 1$.

6. Se consideră dreptele $d \parallel e$ și dreptele a, b, c paralele echidistante cu proprietatea că $d \perp a$. Notăm $d \cap a = \{A\}$, $d \cap b = \{B\}$, $d \cap c = \{C\}$, $e \cap a = \left\{A'\right\}$, $e \cap b = \left\{B'\right\}$ și $e \cap c = \left\{C'\right\}$. a) Știind că punctele A,B și C sunt coliniare în această ordine ce poți spune despre lungimea segmentelor AB, BC, $A'B'$ și $B'C'$? b) Dacă, în plus, $AC' \cap A'C = \{O\}$, demonstrează că punctele B, O și B' sunt coliniare.

7. Se consideră paralelogramul $MNPQ$, punctul $A \in MN$, astfel încât $\dfrac{AM}{AN} = \dfrac{2}{5}$ și punctul $B \in NP$, astfel încât $\dfrac{BN}{BP} = 2{,}5$. a) Arată că $AB \parallel MP$. b) Dacă $AB \cap NQ = \{C\}$ și $MP \cap NQ = \{O\}$, calculează valoarea raportului $\dfrac{NC}{CO}$. d) Determină valoarea raportului $\dfrac{NC}{CQ}$.

8. Se consideră paralelogramul $ABCD$ și punctele $M \in AB$, $N \in BC$, $P \in AD$, $Q \in CD$, astfel încât $MN \parallel AC$, $NP \parallel AB$ și $PQ \parallel AC$, ca în *Figura 16*.

a) Demonstrează că $MQ \parallel AD$.

b) Dacă S este intersecția dreptelor MQ și NP, arată că punctul S aparține segmentului BD.

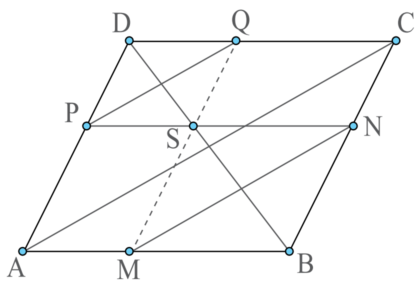


Figura 16

9. Se consideră dreptunghiul $ABCD$ și punctele $M \in (AB)$, respectiv $N \in CD$, astfel încât $BM = DN$. Dacă punctele P și Q aparțin diagonalei AC, astfel încât $PM \perp AB$ și $QN \perp CD$, demonstrează că punctul P este simetricul punctului Q față de mijlocul segmentului AC.

Evaluare

10p din oficiu

10p **1.** Stabilește care dintre următoarele două afirmații este falsă și care este adevărată:

a) Raportul a două segmente depinde de unitatea de măsură.

b) Mai multe drepte paralele echidistante determină, pe o secantă oarecare, segmente congruente.

10p **2.** Alege varianta de răspuns corect: *Dacă* $AB = 40$ *cm și* C *aparține segmenului* AB, *astfel încât* $\frac{CA}{CB} = \frac{5}{3}$, *atunci lungimea segmentului* CA *este egală cu:*

a) 5 cm; b) 25 cm; c) 100 cm; d) 15 cm.

10p **3.** Asociază fiecărui raport din coloana **A** raportul corespunzător din coloana **B**, știind că în *Figura 17* avem cinci drepte paralele echidistante, intersectate de două secante:

A	**B**
i) $\frac{AB}{BC}$	a) $\frac{MP}{NQ}$
ii) $\frac{AC}{BD}$	b) $\frac{MP}{PQ}$
iii) $\frac{BC}{CD}$	c) $\frac{NP}{MN}$
iv) $\frac{BC}{AB}$	d) $\frac{MN}{NP}$
	e) $\frac{NP}{PQ}$

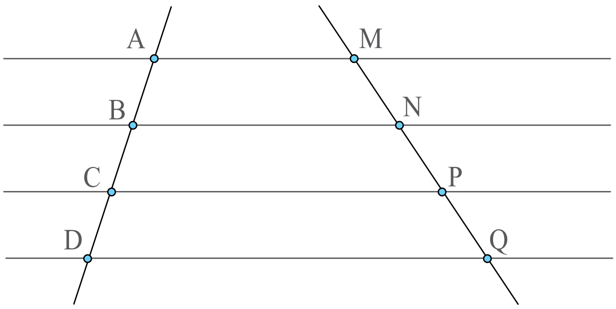


Figura 17

10p **4.** Completează spațiile punctate cu răspunsul corect:

a) Dacă în triunghiul ABC avem $MN \parallel BC$, cu $M \in AB$ și $N \in AC$, $AM = 6$ cm, $AB = 24$ cm și $AC = 16$ cm, atunci $AN = \ldots$.

b) Dacă în triunghiul MNP avem $MN = 30$ cm, $MP = 25$ cm, $A \in MN$, astfel încât $AM = 6$ cm, $B, C \in MP$, astfel încât $BM = 20$ cm și $CP = 20$ cm, atunci $NP \parallel \ldots$.

10p **5.** Considerăm dreptele $d \parallel e \parallel f$ paralele echidistante și a și b două secante, astfel încât dreptele a, b și e sunt concurente în B.

a) Realizează un desen corespunzător enunțului și notează cu A, respectiv C intersecțiile dreptei a cu dreptele d, respectiv f și cu D, respectiv E intersecțiile dreptei b cu dreptele d, respectiv f.

b) Scrie segmentele congruente care se obțin pe cele două secante.

6. Se consideră triunghiul MNP dreptunghic în $M, A \in MN$, $B \in NP$ și $C \in MP$ astfel încât $AB \parallel MP$ și $BC \parallel MN$.

10p a) Demonstrează că $ABCM$ este un dreptunghi.

10p b) Arată că $\frac{AN}{MN} + \frac{CP}{MP} = 1$.

7. Se consideră dreptunghiul $ABCD$ și punctele $M \in (AB)$, astfel încât $\frac{AM}{MB} = \frac{1}{3}$ și $N \in (BC)$, astfel încât $\frac{BN}{NC} = 3$.

10p a) Arată că $MN \parallel AC$.

10p b) Dacă $MN \cap BD = \{Q\}$, calculează $\frac{BQ}{QD}$.