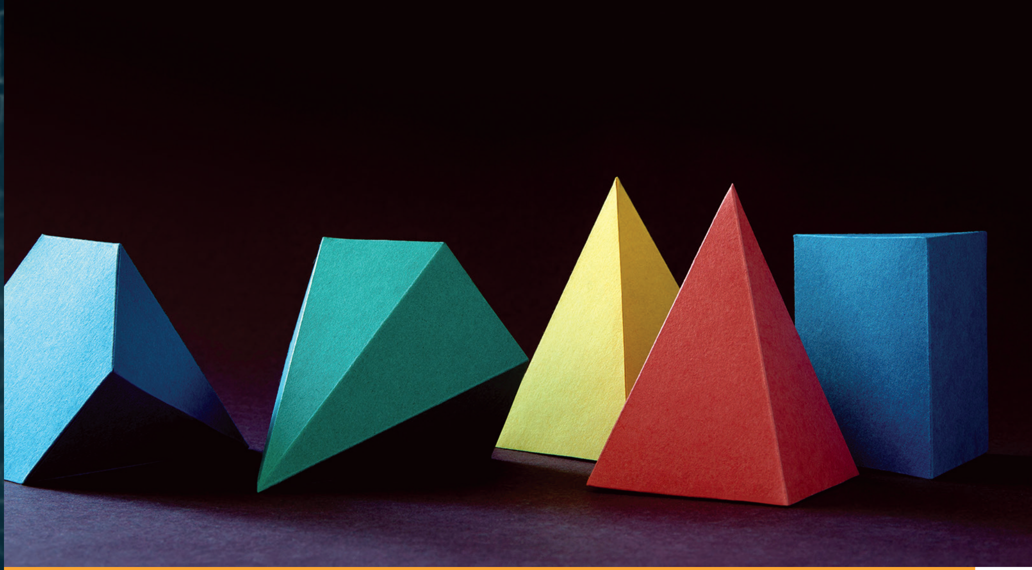
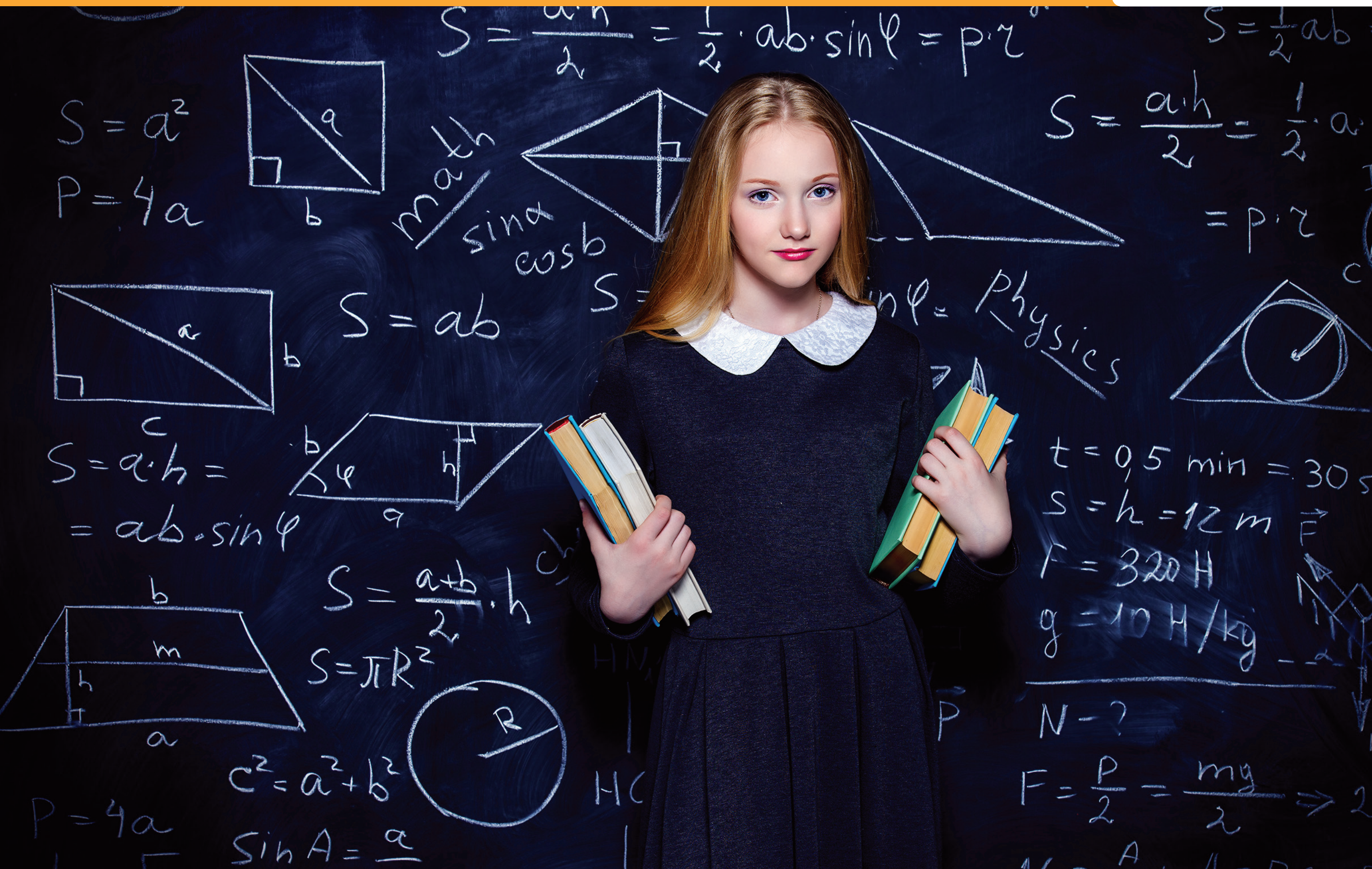


Matematică – Manual pentru clasa a VIII-a

VIII

Elemente ale geometriei în spațiu. Paralelism

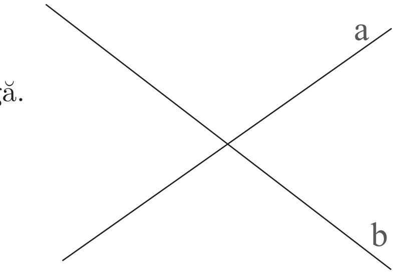


1. Paralelism: drepte paralele; unghiul a două drepte

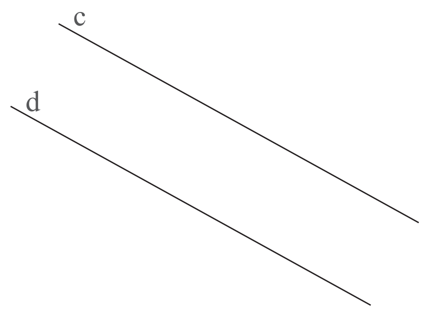
Amintește-ți!

1. Analizează, cu atenție, imaginile din stânga și apoi figurile din dreapta și răspunde la întrebările de mai jos.

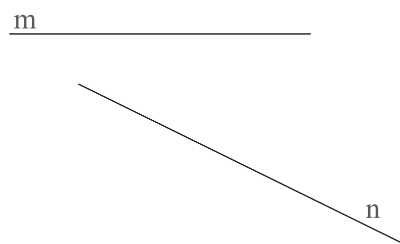
În figura din partea dreaptă este reprezentată schița celor două străzi din imaginea din partea stângă.



În figura din partea dreaptă este reprezentată schița celor două șine de cale ferată din imaginea din partea stângă.



În figura din partea dreaptă este reprezentată schița șoselei și a pasarelei din imaginea din partea stângă.



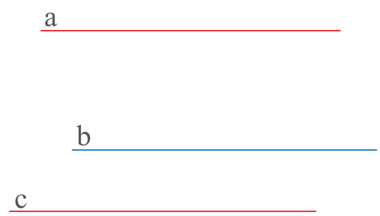
a) Dreptele a și b au puncte comune?
b) Sunt dreptele a și b în același plan? Justifică răspunsul.
c) Dreptele c și d au puncte comune?
d) Sunt dreptele c și d în același plan? Justifică răspunsul.
e) Dreptele m și n au puncte comune?
f) Sunt dreptele m și n în același plan? Justifică răspunsul.

Important

- În spațiu, două drepte pot fi:
  - ▷ **concurente:** sunt două drepte, coplanare care au exact un punct comun;
  - ▷ **paralele:** sunt două drepte, coplanare care nu au niciun punct comun;
  - ▷ **necoplanare:** sunt drepte care nu au niciun punct comun și nu sunt situate în același plan.

• În spațiu, două drepte paralele cu a treia dreaptă sunt paralele între ele.

$$\left.\begin{array}{l} a \parallel b \\ b \parallel c \end{array}\right\} \Rightarrow a \parallel c$$



Observă și descoperă!

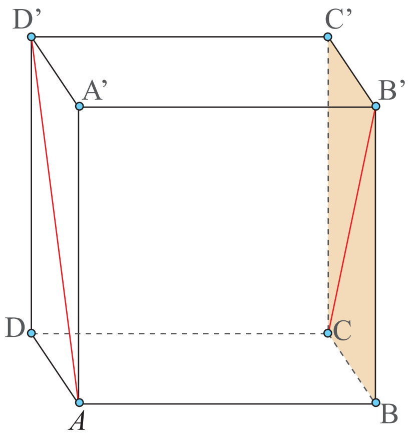


Figura 1

2. În *Figura 1* și *Figura 2* este vorba de același corp reprezentat din perspective diferite.

Privind *Figura 1*, Ana va spune: „Dreptele AD' și $B'C$ sunt drepte necoplanare”.

Privind *Figura 2*, Radu va spune: „Dreptele AD' și $B'C$ sunt drepte concurente”.

a) Care dintre cei doi copii are dreptate?

b) De ce crezi că s-a înșelat unul dintre copii?

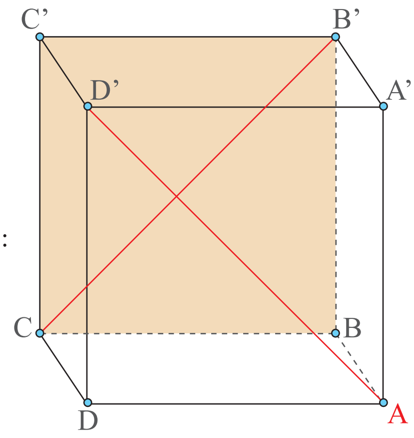


Figura 2

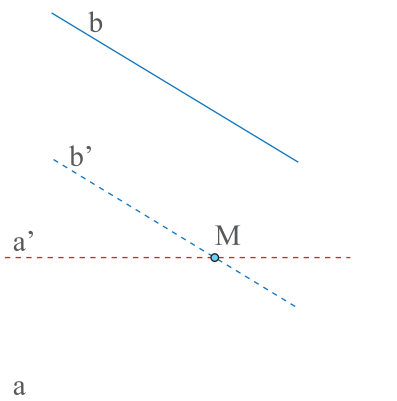
Important

• Dreptele concurente sunt coplanare (situate în același plan) și formează patru unghiuri, două câte două congruente.

• **Măsura unghiului dintre două drepte concurente** este cea mai mică măsură a unghiurilor formate de cele două drepte.

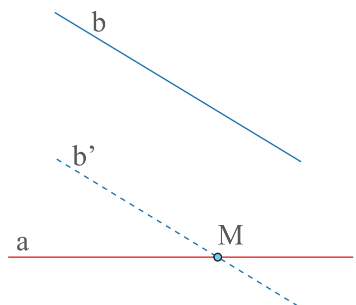
• **Măsura unghiului dintre două drepte paralele este egală cu** $0°$.

• **Măsura unghiului dintre două drepte necoplanare** este măsura unghiului format de paralelele duse printr-un punct oarecare (convenabil ales) la cele două drepte.



$$\left.\begin{array}{l} a' \parallel a \\ b' \parallel b \\ a' \cap b' = \{M\} \end{array}\right\} \Rightarrow \sphericalangle(a,b) = \sphericalangle(a',b')$$

Uneori, punctul M se ia pe una dintre drepte și, prin el, se duce paralela la cealaltă dreaptă (vezi figura din dreapta).



Exersează!

3. Se consideră cubul $ABCDA'B'C'D'$ din *Figura 3*. Scrie în caiet:
a) un exemplu de două drepte paralele;
b) un exemplu de două drepte coplanare;
c) un exemplu de două drepte concurente;
d) un exemplu de două drepte necoplanare.

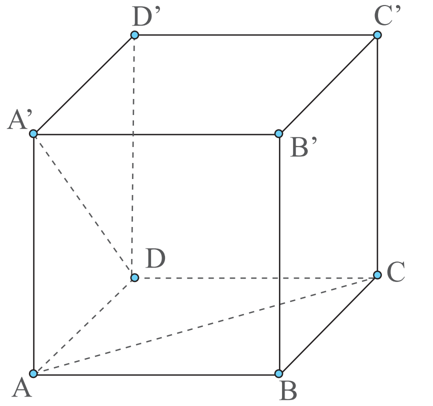


Figura 3

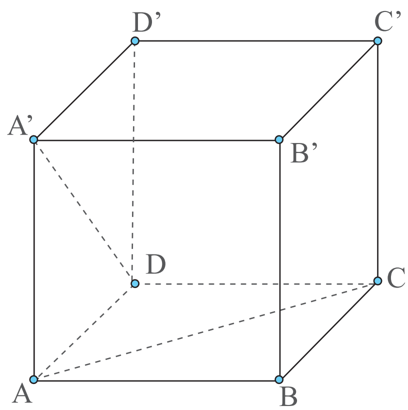
4. Folosind cubul din *Figura 3*, stabilește măsurile următoarelor unghiuri:
a) unghiul dintre dreptele AA' și AD;
b) unghiul dintre dreptele AA' și BC;
c) unghiul dintre dreptele BB' și CC';
d) unghiul dintre dreptele AB și DD';
e) unghiul dintre dreptele AD și DA';
f) unghiul dintre dreptele CC' și $A'D$;
g) unghiul dintre dreptele $B'C'$ și AC.

5. Problemă rezolvată: Se consideră cubul $ABCDA'B'C'D'$. Determină măsura unghiului dintre dreptele $A'D$ și AC.

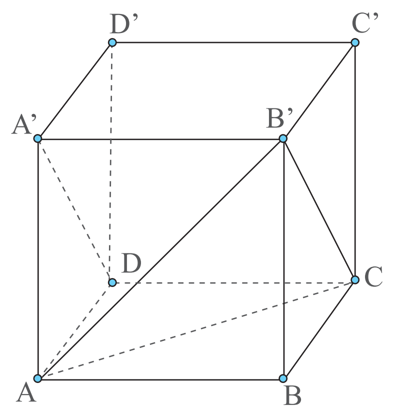
Soluție:

Cum gândesc: Pas 1. Realizez un desen corespunzător enunțului.

Cum scriu:



Pas 2. Trebuie ca, printr-un punct al uneia dintre drepte să construiesc o paralelă la cealaltă dreaptă. Voi arăta că dreptele $A'D$ și $B'C$ sunt paralele.



Construim segmentul $B'C$.
Avem $A'B' \parallel D'C' \parallel DC$.
Avem $A'B' = D'C' = DC$.
Cum $A'B' \parallel DC$ și $A'B' = DC$, obținem că $A'B'CD$ este paralelogram și deci $A'D \parallel B'C$.

Pas 3. Pun în evidență unghiul care dă măsura unghiului căutat.

Deoarece $A'D \parallel B'C$ rezultă $\sphericalangle(A'D,AC) = \sphericalangle(B'C,AC)$.

Pas 4. Pentru determinarea măsurii unghiului dintre dreptele $B'C$ și AC folosesc triunghiul $B'CA$. Observ că toate laturile acestui triunghi sunt diagonale ale fețelor cubului, deci triunghiul $B'CA$ este echilateral.

În $\triangle B'CA$ avem $AB' = B'C = AC$ (diagonale ale fețelor cubului) $\Rightarrow \triangle B'CA$ este echilateral, deci $\sphericalangle B'CA = 60°$.

Avem $\sphericalangle(A'D,AC) = \sphericalangle(B'C,AC) = \sphericalangle B'CA$.

În concluzie $\sphericalangle(A'D,AC) = 60°$.

6. Se consideră $ABCA'B'C'$ o prismă dreaptă cu baza triunghi echilateral, M mijlocul muchiei AB și M' mijlocul muchiei $A'B'$ (*Figura 4*).

a) Demonstrează că $AA' \parallel MM'$.
b) Demonstrează că $CM \parallel C'M'$.
c) Determină măsura unghiului dintre dreptele AB și CC'.
d) Determină măsura unghiului dintre dreptele AB și $B'C'$.

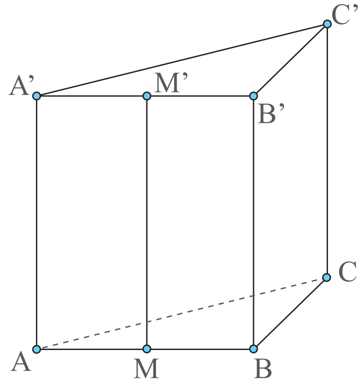


Figura 4

7. Se consideră prisma dreaptă $ABCDEFA'B'C'D'E'F'$ cu baza hexagon regulat.

a) Realizează un desen corespunzător.
b) Precizează două perechi de drepte paralele.
c) Precizează două perechi de drepte concurente.
d) Precizează două perechi de drepte coplanare.
e) Precizează două perechi de drepte necoplanare.

8. Se consideră prisma dreaptă $ABCDEFA'B'C'D'E'F'$ cu baza hexagon regulat.
Demonstrează că:

a) $AA' \parallel CC'$;
b) $BB' \parallel EE'$;
c) $AB \parallel E'D'$;
d) $BC \parallel E'F'$;
e) $AC \parallel A'C'$;
f) $BE \parallel B'E'$;
g) $AC \parallel D'F'$;
h) $AE \parallel B'D'$.

9. Se consideră prisma dreaptă $ABCDEFA'B'C'D'E'F'$ cu baza hexagon regulat. Determină măsurile unghiurilor dintre dreptele:

a) AB și BB';
b) BC și EE';
c) AB și $E'F'$;
d) AC și $C'E'$;
e) AD și $B'E'$;
f) AF și $D'F'$.

2. Dreapta paralelă cu planul

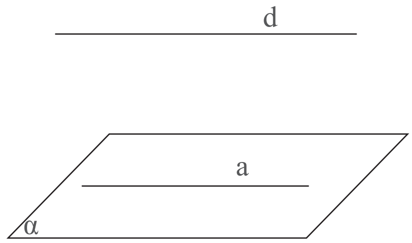
Observă și descoperă!

1. În figura din dreapta sunt reprezentate schițat șoseaua sub forma planului, pasarela sub forma dreptei și umbra pasarelei pe șosea sub forma dreptei a.

a) Cum sunt dreptele d și a?

b) Dacă β este planul determinat de dreptele d și a, care este dreapta de intersecție a planelor α și β?

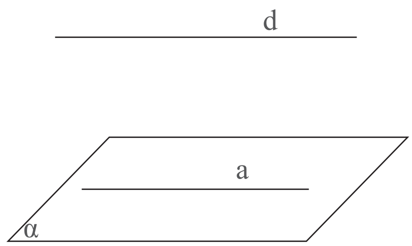
c) Dreapta d și planul α au puncte comune?



Important

• O dreaptă este **paralelă** cu un un plan dacă nu are niciun punct comun cu planul.

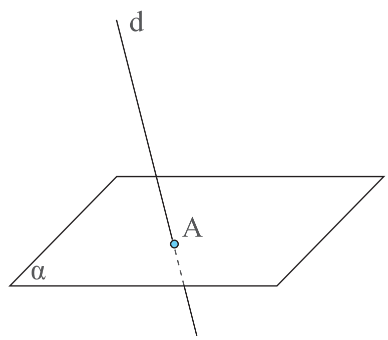
Scriu: $d \parallel \alpha$. Citesc: dreapta d este paralelă cu planul α.



• O dreaptă este **concurentă** cu un plan (înțeapă planul) dacă are exact un punct comun cu planul.

Scriu: $d \cap \alpha = \{A\}$. Citesc: dreapta d intersectează planul (înțeapă planul) α în punctul A.

• Dacă o dreaptă are două puncte comune cu un plan, atunci ea este conținută în plan. (Axioma includerii)

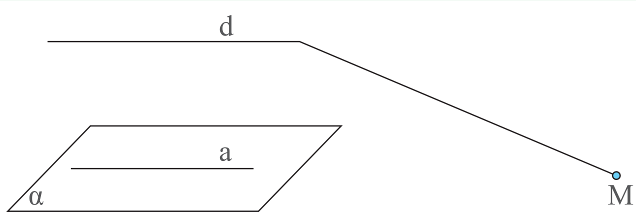


• **Cum dovedesc că o dreaptă este paralelă cu un plan? Dacă o dreaptă este paralelă cu o dreaptă dintr-un plan, atunci ea este paralelă cu planul.**

$$\left.\begin{array}{l} d \parallel a \\ a \subset \alpha \end{array}\right\} \Rightarrow d \parallel \alpha$$

Justificare: Presupunem că $d \nparallel \alpha$. Atunci d și α au puncte comune. Considerăm M un punct comun.

Pe de altă parte, $d \parallel a$ implică faptul că există un plan $\beta = (d,a)$.



Deoarece $M \in d \cap \alpha$ obținem $M \in d \subset \beta$ și $M \in \alpha$, adică $M \in \alpha \cap \beta$. Cum $\alpha \cap \beta = a$ rezultă $M \in a$.

Dar $M \in d$, deci dreptele a și d sunt concurente. Contradicție cu $d \parallel a$, prin urmare presupunerea făcută ($d \nparallel \alpha$) este falsă. Obținem că $d \parallel \alpha$.

Observație: Dacă o dreaptă este paralelă cu un plan, atunci este paralelă cu o infinitate de drepte din plan, dar nu cu oricare dreaptă din plan.

Exemplu: muchia notată cu a este paralelă cu fiecare dreaptă determinată de codul de bare, dar nu este paralelă cu dreapta de sub textul scris pe cutie.

Exersează!

2. Prezintă două exemple din sala de clasă în care o dreaptă este paralelă cu un plan.

3. a) Pe un cub, alege o muchie și o față laterală astfel încât dreapta pe care se află muchia să fie paralelă cu planul feței. Justifică paralelismul.

b) Mai există vreo față paralelă cu muchia aleasă?

4. Se consideră paralelipipedul dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$. Demonstrează că:

a) $AB \parallel (CDD')$; b) $BB' \parallel (ADD')$; c) $CD' \parallel (ABB')$; d) $AD' \parallel (BCC')$; e) $AC \parallel (A'C'B)$;

f) $AD' \parallel (A'BC')$; g) $BC' \parallel (AD'C)$.

5. Dreptunghiurile $ABCD$ și $ABEF$ sunt situate în plane diferite. Demonstrează că $FD \parallel (BEC)$.

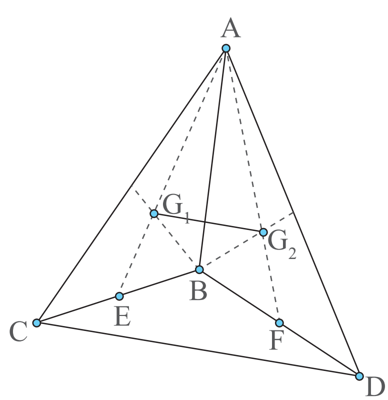
6. Dreptunghiurile $ABCD$ și $ABEF$ sunt situate în plane diferite. Dacă M este punctul de intersecție a diagonalelor dreptunghiului $ABCD$ și N este punctul de intersecție a diagonalelor dreptunghiului $ABEF$, demonstrează că $MN \parallel (FAD)$.

7. Problemă rezolvată: Triunghiurile ABC și ABD sunt situate în plane diferite. Dacă G_1 și G_2 sunt centrele de greutate ale triunghiurilor ABC, respectiv ABD, demonstrează că: $G_1G_2 \parallel (BCD)$.

Soluție:

Cum gândesc: Pas 1. Realizez un desen corespunzător enunțului. Punctele E și F sunt mijloacele laturilor BC, respectiv BD.

Cum scriu:



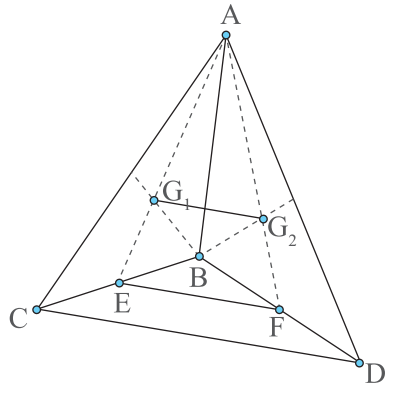
Pas 2. Trebuie identificată o dreaptă în planul (BCD) despre care să demonstrez că este paralelă cu G_1G_2.

Îmi amintesc că, în plan, paralelismul a două drepte se poate demonstra prin:

1. drepte tăiate de o secantă
2. reciproca teoremei lui Thales
3. linia mijlocie în triunghi
4. laturi opuse în paralelogram
5. tranzitivitatea relației de paralelism.

În problema dată, dacă vorbim de centrul de greutate, știu că el se află, pe o mediană, la $\frac{2}{3}$ de vârf și $\frac{1}{3}$ de bază. Acest lucru mă determină să folosesc reciproca teoremei lui Thales în triunghiul AEF.

Din AE este mediană și G_1 este centrul de greutate, rezultă $\frac{AG_1}{AE} = \frac{2}{3}$. Analog obțin $\frac{AG_2}{AF} = \frac{2}{3}$. În triunghiul AEF avem $\frac{AG_1}{AE} = \frac{AG_2}{AF} \left(= \frac{2}{3}\right)$ și, din reciproca teoremei lui Thales, rezultă $G_1G_2 \parallel EF$. Acum $G_1G_2 \parallel EF$ și $EF \subset (BCD)$ implică $G_1G_2 \parallel (BCD)$.



8. Triunghiurile ABC și ABD sunt situate în plane diferite. Dacă G_1 și G_2 sunt centrele de greutate ale triunghiurilor ABC, respectiv ABD, demonstrează că $CD \parallel (BG_1G_2)$.

9. Se consideră piramida regulată $VABC$, punctul E pe muchia VB și punctul F pe muchia CV astfel încât AE este bisectoarea unghiului VAB și AF este bisectoarea unghiului VAC. Demonstrează că $EF \parallel (ABC)$.

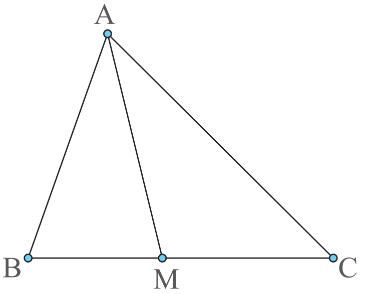


Figura 5

Indicație:
Dacă AM este bisectoarea unghiului A, din triunghiul ABC, atunci $\frac{MB}{MC} = \frac{AB}{AC}$ (vezi *Figura 5*).

10. Se consideră un plan α, o dreaptă a paralelă cu planul α și un plan β care conține dreapta a, ca în *Figura 6*. Dacă $\alpha \cap \beta = d$, arată că $a \parallel d$.

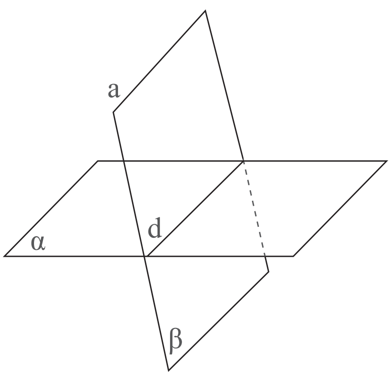
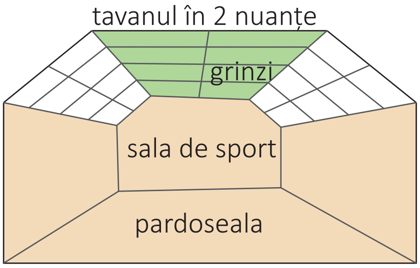
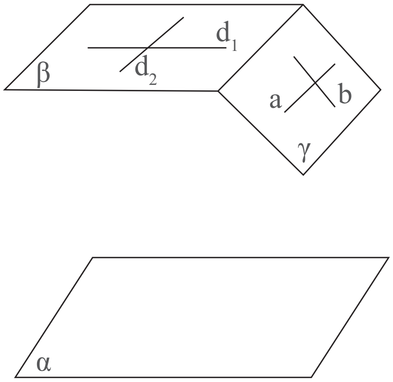


Figura 6

3. Plane paralele

Observă și descoperă!



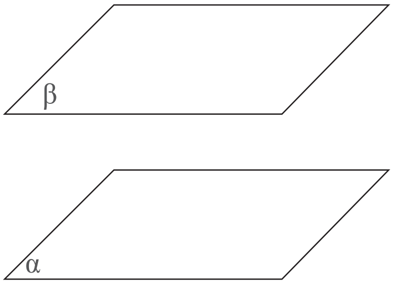


1. În figura din dreapta sunt reprezentate schițat pardoseala sălii de sport sub forma planului α, porțiunea din tavan de culoare vernil sub forma planului β, o parte laterală a tavanului sub forma planului γ și sub forma dreptelor d_1, d_2, a și b o parte din grinzile din imaginea din stânga.

Privește cu atenție imaginea și figura și stabilește care dintre afirmațiile următoare sunt adevărate și care sunt false:

a) Planele α și β nu au puncte comune.
b) Planele β și γ nu au puncte comune.
c) Planele α și γ nu au puncte comune.
d) Dreptele d_1 și d_2 sunt concurente.
e) Dreptele d_1 și d_2 sunt paralele cu planul α.
f) Dreapta b este paralelă cu planul α.

Important



• Două plane sunt **paralele** dacă nu au niciun punct comun.

Scriu: $\alpha \parallel \beta$. Citesc: planul alfa este paralel cu planul beta.

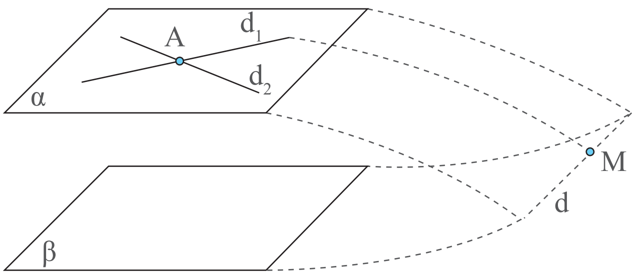
• Dacă două plane distincte au un punct comun, atunci au comun o dreaptă. Planele sunt concurente.

• Cum dovedesc că două plane sunt paralele?

Dacă două drepte concurente dintr-un plan sunt paralele cu alt plan, atunci planul determinat de cele două drepte este paralel cu planul inițial.

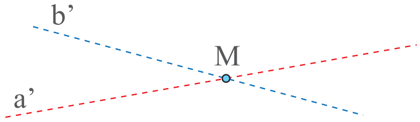
$$\left.\begin{array}{l} d_1 \cap d_2 = \{A\} \\ d_1, d_2 \subset \alpha \\ d_1 \parallel \beta \\ d_2 \parallel \beta \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha \parallel \beta$$

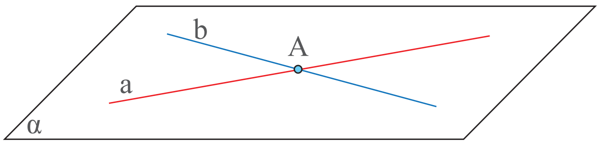
Justificare: Presupunem că planele nu sunt paralele. Atunci există o dreaptă $d = \alpha \cap \beta$. Dreapta d și dreptele d_1 și d_2 sunt din planul α. Deoarece d_1 și d_2 sunt drepte concurente, rezultă că dreapta d se intersectează cu dreapta d_1 sau cu dreapta d_2. (Dacă d nu se intersectează nici cu d_1, nici cu d_2, atunci $d \parallel d_1$ și $d \parallel d_2$, de unde rezultă $d_1 \parallel d_2$. Dar $d_1 \cap d_2 = \{A\}$.) Considerând $\{M\} = d \cap d_1$, atunci $M \in d \subset \beta$ și $M \in d_1$, adică $d_1 \cap \beta \neq \emptyset$. Contradicție cu afirmația din ipoteză care spune că $d_1 \parallel \beta$. Presupunerea făcută este falsă, prin urmare $\alpha \parallel \beta$.



• Printr-un punct exterior unui plan α se poate construi un singur plan paralel cu planul α.

Justificare: Considerăm M punctul exterior planului α și dreptele concurente a și b incluse în planul α. Prin punctul M trece o unică dreaptă paralelă cu dreapta a; $a' \parallel a$ (Axioma paralelelor). Prin punctul M trece o unică dreaptă paralelă cu dreapta b; $b' \parallel b$ (Axioma paralelelor). Dreptele a' și b' sunt drepte concurente, deci există un plan $\beta = (a', b')$. Din $a \parallel a'$, $a' \subset \beta$ și $b \parallel b'$, $b' \subset \beta$ deducem că $\beta \parallel \alpha$ și unicitatea construcțiilor a' și b' implică unicitatea planului β.

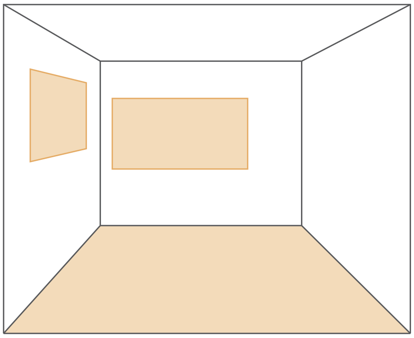




• Două plane α și β, care sunt paralele cu al treilea plan γ, sunt paralele între ele.

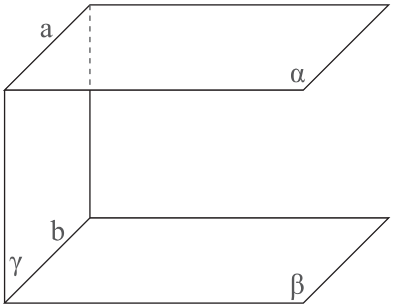
Justificare: Presupunem că $\alpha \nparallel \beta$. Atunci $\alpha \cap \beta = d$. Dacă vom considera un punct A pe dreapta d, atunci prin punctul A trec două plane paralele cu planul γ. Contradicție. Rezultă $\alpha \parallel \beta$.

Observă și descoperă!



2. În figura din dreapta sunt reprezentate schițat pardoseala sălii de clasă sub forma planului β, tavanul sub forma planului α și un perete lateral sub forma planului γ din imaginea din stânga.

Privește cu atenție imaginea și figura și stabilește care dintre afirmațiile următoare sunt adevărate și care sunt false.



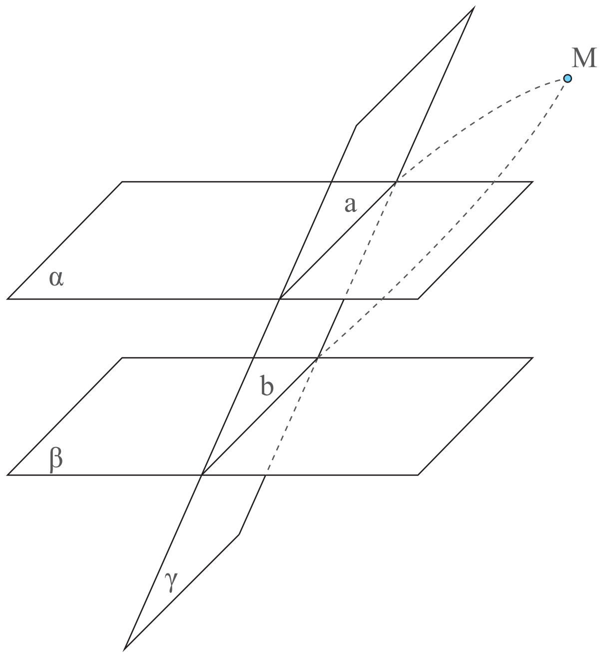
a) Planele α și β sunt paralele.
b) Planele β și γ sunt paralele.
c) Planele γ și α nu sunt paralele.
d) $\alpha \cap \gamma = a$.
e) $\beta \cap \gamma = b$.
f) Dreptele a și b nu sunt paralele.

Important

• **Dacă** un plan intersectează unul din două plane paralele, **atunci** îl intersectează și pe celălalt și dreptele de intersecție sunt paralele.

$$\left.\begin{array}{l}\gamma \cap \alpha = a \\ \alpha \parallel \beta\end{array}\right\} \Rightarrow \gamma \cap \beta = b \text{ și } a \parallel b$$

Justificare: Presupunem că planele γ și β nu se intersectează. Atunci $\gamma \parallel \beta$. Dar $\alpha \parallel \beta$ și atunci $\alpha \parallel \gamma$. Dar $\alpha \cap \gamma = a$. Contradicție. Prin urmare planele γ și β se intersectează. Consider $b = \gamma \cap \beta$. Presupunem că dreptele a și b nu sunt paralele. Atunci, ele fiind coplanare (sunt în planul γ), sunt concurente. Considerăm M punctul de intersecție a dreptelor a și b. Avem $M \in a \subset \alpha$ și $M \in b \subset \beta$, implică $M \in \alpha \cap \beta$, adică $\alpha \nparallel \beta$. Dar $\alpha \parallel \beta$, contradicție. Presupunerea făcută este falsă, prin urmare dreptele a și b sunt paralele.



Exersează!

3. Identifică, în sala de clasă, perechi de plane paralele.

4. Identifică, pe fețele unui paralelipiped dreptunghic, perechi de plane paralele.

5. Demonstrează că în orice prismă dreaptă bazele sunt incluse în plane paralele.

6. Se consideră prisma dreaptă $ABCA'B'C'$ cu baza triunghi echilateral și punctele M, N și P astfel încât $AB' \cap A'B = \{M\}$, $BC' \cap B'C = \{N\}$ și $AC' \cap A'C = \{P\}$. Demonstrează că planul (MNP) este paralel cu planul (ABC).

7. Se consideră cubul $ABCDA'B'C'D'$.
a) Demonstrează că $AD' \parallel BC'$.
b) Demonstrează că planele $AB'D'$ și $BC'D$ sunt paralele.

8. Se consideră planele $\alpha \parallel \beta$ și dreptele $d_1 \parallel d_2$ astfel încât $d_1 \cap \alpha = A_1$, $d_1 \cap \beta = B_1$; $d_2 \cap \alpha = A_2$, $d_2 \cap \beta = B_2$.
a) Desenează o figură corespunzătoare enunțului.
b) Demonstrează că $A_1B_1 = A_2B_2$ și $A_1A_2 = B_1B_2$.

9. Se consideră tetraedrul $ABCD$ și punctele G_1, G_2 și G_3 centrele de greutate ale fețelor BCD, ACD, respectiv ABD.
a) Realizează o figură corespunzătoare enunțului.
b) Demonstrează că $(G_1G_2G_3) \parallel (ABC)$.

4. Aplicații: secțiuni paralele cu baza în corpurile geometrice studiate; trunchiul de piramidă și trunchiul de con circular drept (descriere și reprezentare)

Observă și descoperă!

1. Ajută-l pe Radu să rezolve următoarea problemă.

Se consideră o piramidă triunghiulară $VABC$ (*Figura 7*). Un plan paralel cu planul bazei intersectează muchiile laterale AV, VB și CV în punctele A', B', respectiv C'. Demonstrează că triunghiul $A'B'C'$ este asemenea cu triunghiul ABC.

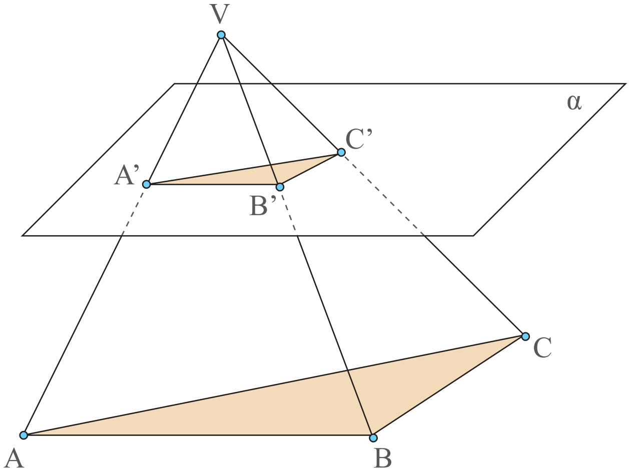


Figura 7

Radu te întreabă:

a) Care este dreapta de intersecție a planelor α și (VAB)?

b) Care este dreapta de intersecție a planelor (VAB) și (ABC)?

c) Sunt paralele planele α și (ABC)?

d) Sunt paralele dreptele AB și $A'B'$?

e) Justifică de ce $BC \parallel B'C'$ și $A'C' \parallel AC$.

De aici Radu se descurcă singur. Urmărește raționamentul lui Radu.

În triunghiul VAB, $A'B' \parallel AB$ implică, din teorema fundamentală a asemănării, $\triangle VA'B' \sim \triangle VAB$, de unde $\dfrac{VA'}{VA} = \dfrac{VB'}{VB} = \dfrac{A'B'}{AB}$. (1)

Analog, din $\triangle VB'C' \sim \triangle VBC$ rezultă $\dfrac{VB'}{VB} = \dfrac{VC'}{VC} = \dfrac{B'C'}{BC}$ (2) și din $\triangle VA'C' \sim \triangle VAC$ rezultă $\dfrac{VA'}{VA} = \dfrac{VC'}{VC} = \dfrac{A'C'}{AC}$. (3)

Din (1), (2) și (3) deducem că $\dfrac{A'B'}{AB} = \dfrac{B'C'}{BC} = \dfrac{A'C'}{AC}$, adică $\triangle A'B'C' \sim \triangle ABC$.

Important

• Dacă secționăm o piramidă cu un plan paralel cu planul bazei, atunci în plan obținem un poligon cu laturile respectiv paralele cu laturile poligonului bazei piramidei, iar în piramidă două corpuri: o piramidă mică având același vârf cu piramida inițială și elementele proporționale cu cele ale piramidei inițiale și un corp nou numit **trunchi de piramidă.**

• **Trunchiul de piramidă** este corpul rămas în urma intersecției unei piramide cu un plan paralel cu planul bazei și îndepărtarea piramidei mici, din vârf.

• Pentru a desena un trunchi de piramidă se desenează mai întâi piramida!

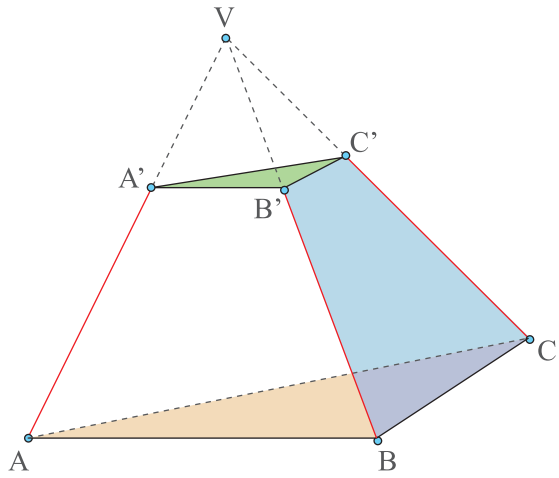
• **Elementele unui trunchi de piramidă sunt:**

▷ **Bazele trunchiului de piramidă.** Baza mare și baza mică. Sunt două poligoane cu laturile respectiv paralele. În figura alăturată baza mare este $\triangle ABC$, iar baza mică este $\triangle A'B'C'$.

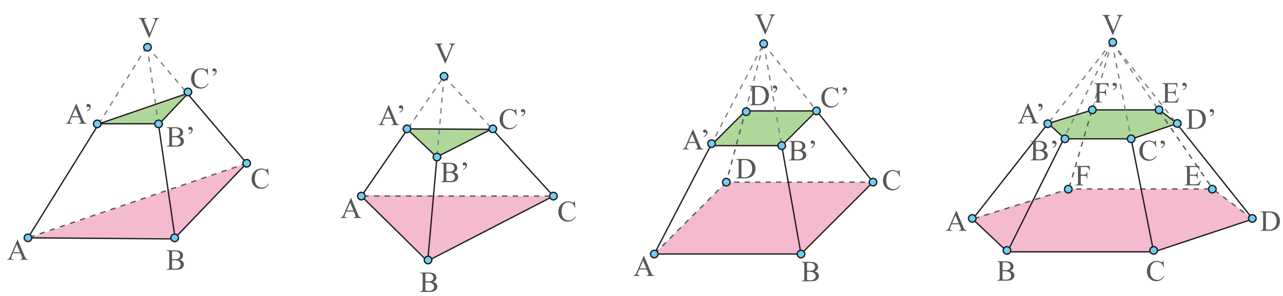
▷ **Fețele laterale.** Sunt totdeauna trapeze. Dacă trunchiul de piramidă provine dintr-o piramidă regulată, atunci fețele laterale sunt trapeze isoscele. În figura alăturată fețele laterale sunt trapezele $ABB'A'$, $BCC'B'$ și $ACC'A'$.

▷ **Muchiile laterale.** Sunt segmentele care rămân din muchiile laterale ale piramidei după ce se înlătură piramida mică. Dacă trunchiul de piramidă provine dintr-o piramidă regulată, atunci muchiile laterale sunt congruente. În figura alăturată muchiile laterale sunt AA', BB' și CC'.

▷ **Muchiile bazelor.** Sunt laturile celor două poligoane care reprezintă bazele trunchiului de piramidă. În figura alăturată muchiile bazelor sunt AB, BC, CA, $A'B'$, $B'C'$ și $C'A'$.



Exemple de trunchiuri de piramidă:



• **Trunchiul de con circular drept** este corpul rămas în urma intersecției unui con circular drept cu un plan paralel cu planul bazei și îndepărtarea conului mic, din vârf.

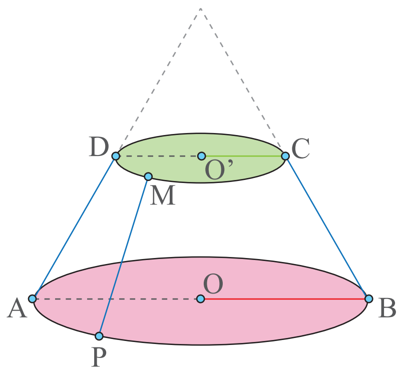
• **Elementele unui trunchi de con circular drept sunt:**

▷ **Bazele trunchiului de con:** baza mare și baza mică. Sunt două cercuri de raze diferite.

▷ **Suprafața laterală**. Trunchiul de con nu are fețe laterale; are o suprafață laterală.

▷ **Razele bazelor:** raza bazei mari, respectiv raza bazei mici.

▷ **Generatoarea:** este segmentul care rămâne din generatoarea conului după îndepărtarea conului mic.



Exersează!

2. Se consideră un trunchi de piramidă regulată $ABCA'B'C'$ (*Figura 8*), cu baza triunghi echilateral. Dacă muchia bazei mari este egală cu 8 cm, muchia bazei mici este egală cu 4 cm și muchia laterală a piramidei din care provine trunchiul are lungimea egală cu 10 cm, determină lungimea muchiei laterale a trunchiului de piramidă.

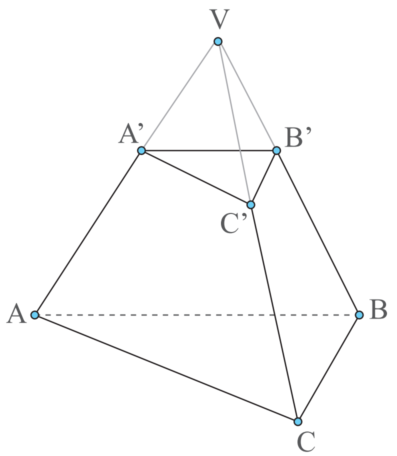


Figura 8

3. Se consideră un trunchi de con circular drept în care raza bazei mari este de 10 cm, raza bazei mici este de 5 cm și generatoarea trunchiului de con este de 6 cm. Determină lungimea generatoarei conului circular drept din care provine trunchiul de con.

4. Se consideră un con circular drept cu raza bazei egală cu 12 cm. Se secționează conul cu un plan paralel cu planul bazei care intersectează o generatoare a conului la $\frac{2}{3}$ din generatoare, față de vârful conului. Determină lungimea razei cercului de secțiune.

5. Aria unei fețe laterale a unei piramide drepte cu baza pătrat este egală cu 48 cm^2. Se secționează piramida cu un plan care trece prin mijlocul unei muchii laterale. Determină aria unei fețe laterale a trunchiului de piramidă obținut.

5. Recapitulare

1. Transcrie, pe caiet, tabelul de mai jos și apoi, folosindu-te de *Figura 9*, completează fiecare spațiu punctat din coloana **A** cu litera din coloana **B** pentru care se obține un enunț adevărat.

A	**B**
.... $\in \alpha$	d
.... $\subset \alpha$	e
.... $\cap \alpha \neq \emptyset$	f
.... $\cap \alpha = \emptyset$	P
	O

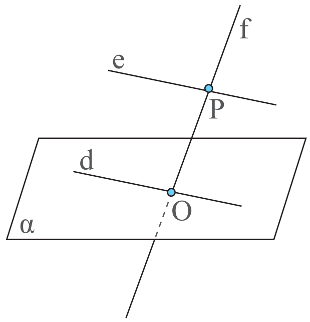


Figura 9

2. Se consideră prisma dreaptă $MNPM'N'P'$ cu baza triunghi echilateral.

a) Realizează un desen corespunzător enunțului.

b) Precizează care dintre următoarele afirmații sunt adevărate și care sunt false:
i) $MN \parallel M'N'$; ii) $NP \parallel (M'N'P')$; iii) $MM' \parallel (MPP')$; iv) $(MNP) \parallel (M'N'P')$.
Justifică răspunsurile date.

3. În *Figura 10* $ABCDA'B'C'D'$ este un cub, iar punctele M, N și P sunt mijloacele muchiilor AD, $B'C'$, respectiv BC.

a) Demonstrează că $NP \parallel CC'$.

b) Determină măsura unghiului dintre dreptele MN și CC'.

c) Determină măsura unghiului dintre dreptele MN și $C'D'$.

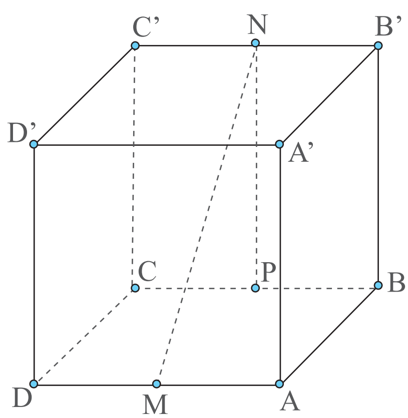


Figura 10

4. Se consideră dreptunghiul $ABCD$ și paralelogramul $ABEF$ situate în plane diferite. Punctele M și N sunt mijloacele segmentelor AD, respectiv AF.

a) Realizează un desen corespunzător enunțului.

b) Demonstrează că $CE \parallel DF$.

c) Demonstrează că $MN \parallel (BEC)$.

5. Se consideră punctele necoplanare A, B, C și D și punctele M, N, P și Q mijloacele segmentelor AB, AC, DC, respectiv DB.

a) Realizează un desen corespunzător enunțului.

b) Demonstrează că $MNPQ$ este paralelogram.

c) Știind că măsura unghiului dintre dreptele AD și BC este egală cu 90°, demonstrează că $MNPQ$ este dreptunghi.

6. Se consideră un pătrat $ABCD$ și M un punct exterior planului pătratului. Se construiesc punctele N, P și Q astfel încât $MN \parallel AB$, $NP \parallel BC$ și $PQ \parallel CD$. Demonstrează că punctele M, N, P și Q sunt coplanare.

7. Se consideră $ABCDA'B'C'D'$ un paralelipiped dreptunghic astfel încât $AB = 10\sqrt{3}$ cm şi $BC = BB' = 10$ cm.

a) Determină lungimile segmentelor AB' și AC.

b) Determină măsura unghiului dintre dreptele AB și CC'.

c) Determină măsura unghiului dintre dreptele AB' și DD'.

d) Determină măsura unghiului dintre dreptele BC' și AD.

e) Determină măsura unghiului dintre dreptele CD' și AB.

8. Problemă rezolvată: Se consideră piramida regulată $VABCD$, cu vârful V și punctele M și N, mijloacele muchiilor CV, respectiv DV.

a) Demonstrează că punctele A, B, M și N sunt coplanare.

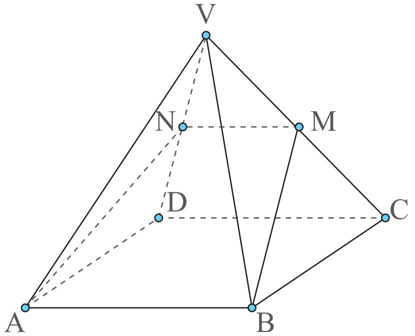
b) Dacă P este punctul de intersecție a dreptelor AN și BM, demonstrează că $VP \parallel BC$.

c) Justifică afirmația: „Într-o piramidă regulată cu baza pătrat, dreapta de intersecție a două fețe laterale opuse este paralelă cu muchiile bazei corespunzătoare acelor fețe și trece prin vârful piramidei".

Soluție:

Cum gândesc: Pas 1. Realizez un desen corespunzător enunțului.

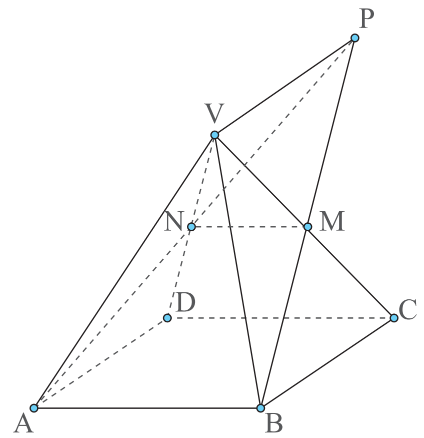
Cum scriu:



Pas 2. a) Pentru a demonstra că patru puncte sunt coplanare trebuie să arătăm că cele patru puncte determină două drepte concurente sau două drepte paralele. Deoarece în problemă se vorbește despre „mijloacele muchiilor" mă pot gândi la linia mijlocie, deci la paralelism.

În $\triangle VDC$, MN este linie mijlocie și atunci $MN \parallel DC$. Dar $ABCD$ este pătrat, deci $DC \parallel AB$. Rezultă $MN \parallel AB$, prin urmare punctele A, B, M și N sunt coplanare.

Pas 3. b) Voi demonstra că patrulaterul $BCPV$ este paralelogram. Punctul M este mijlocul diagonalei CV. Voi arăta că punctul M este și mijlocul diagonalei BP.



Știind că MN este linie mijlocie în triunghiul VDC, avem $MN = \dfrac{DC}{2}$ și, cum $DC = AB$ ($ABCD$ este pătrat), obținem $MN = \dfrac{AB}{2}$.

De aici și din $MN \parallel AB$ rezultă că MN este linie mijlocie în triunghiul PAB, deci punctul M este și mijlocul segmentului BP.

Pas 4. Știu că patrulaterul în care diagonalele au același mijloc este paralelogram și de aici obținem paralelismul celor două drepte care ne interesează.

Din afirmaţiile M este și mijlocul segmentului BP și M este și mijlocul segmentului CV, rezultă că patrulaterul $BCPV$ este paralelogram. Atunci $VP \parallel BC$.

Pas 5. c) Pentru a determina dreapta de intersecție a două plane sunt necesare două puncte comune celor două plane. Planele VBC și VAD au comun punctul V. Trebuie identificată această dreaptă de intersecție care trece prin V.

Avem $P \in BM \subset (VBC)$, deci $P \in (VBC)$ și $P \in AN \subset (VAD)$, deci $P \in (VAD)$. Prin urmare, punctul P aparține celor două plane. Rezultă $(VBC) \cap (VAD) = VP$.

Pas 6. La punctul b) am demonstrat că VP este paralelă cu BC.

Din punctul b) avem $VP \parallel BC$, iar din ipoteză ($ABCD$ pătrat) avem $AD \parallel BC$. Atunci $VP \parallel BC \parallel AD$ și afirmația este justificată.

9. Se consideră trapezul $ABCD$, cu $AB \parallel CD$, și dreptunghiul $ABEF$ situate în plane diferite.
a) Realizează un desen corespunzător enunțului.
b) Demonstrează că dreptele CE și DF sunt coplanare.
c) Dacă P este punctul de intersecție a dreptelor AD și BC, arată că $\dfrac{PC}{PB} = \dfrac{DC}{AB}$.
d) Dacă Q este punctul de intersecție a dreptelor FD și EC, arată că $\dfrac{PC}{PB} = \dfrac{QC}{QE}$.
e) Demonstrează că $PQ \parallel BE \parallel AF$.

10. Se consideră trunchiul de piramidă regulată $ABCA'B'C'$. Dacă latura bazei mici este o treime din latura bazei mari și muchia laterală a trunchiului de piramidă este egală cu 6 cm, determină lungimea muchiei laterale a piramidei din care provine trunchiul.

11. Se consideră un con circular drept VAB cu raza bazei egală cu 18 cm și M un punct de pe generatoarea VA astfel încât $\dfrac{VM}{MA} = \dfrac{2}{7}$. Conul se secționează cu un plan paralel cu planul bazei, care trece prin punctul M. Determină raza bazei mici a trunchiului de con obținut prin secționare.

AUTOEVALUARE – În această unitate de învățare:

Am înțeles foarte bine ....
Îmi este neclar ....
Nu știu să .... / Nu am înțeles ....

Revezi lecțiile și exercițiile noțiunilor notate la culoarea galbenă. Discută cu un coleg/ o colegă sau cu profesorul despre ceea ce nu ai înțeles și ai completat la culoarea roșie.

6. Evaluare

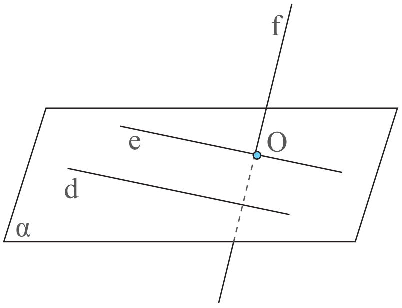


Figura 11

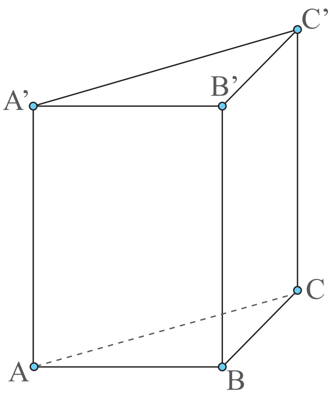


Figura 12

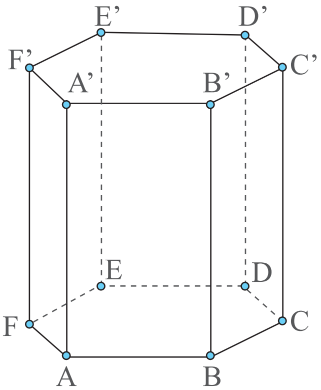


Figura 13

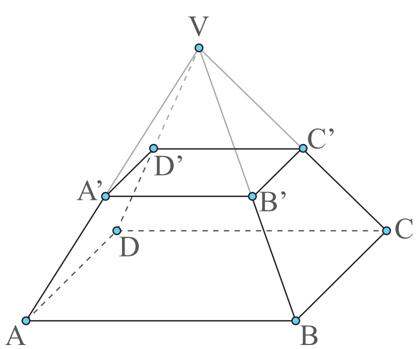


Figura 14

Timp de lucru: 45 de minute

Din oficiu 10p

1. Asociază fiecărei perechi de drepte din coloana A descrierea corespunzătoare din coloana B, folosindu-te de *Figura 11*. *10p*

A	B
1. e și f	a) concurente
2. f și d	b) necoplanare
	c) paralele

La exercițiile 2 – 5, alege răspunsul pe care-l consideri corect.

2. În prisma dreaptă $ABCA'B'C'$ cu baza triunghi echilateral (*Figura 12*), dreapta BC este paralelă cu: *10p*

A. AB; B. BB'; C. AB'; D. $B'C'$.

3. a) Desenează un cub $ABCDA'B'C'D'$. *5p*

b) În cubul $ABCDA'B'C'D'$, măsura unghiului dintre dreptele BB' și CD' este: *5p*

A. 30°; B. 45°; C. 60°; D. 90°.

4. a) Desenează paralelipipedul dreptunghic $MNPQM'N'P'Q'$. *5p*

b) În paralelipipedul dreptunghic $MNPQM'N'P'Q'$, dreapta MN' este paralelă cu planul: *5p*

A. (MNP); B. (NPP'); C. $(M'N'P')$; D. (PQQ').

5. În prisma dreaptă $ABCDEFA'B'C'D'E'F'$ cu baza hexagon regulat (*Figura 13*), planul $(AB'A')$ este paralel cu planul: *10p*

A. (ABC); B. $(C'D'E')$; C. (DEE'); D. (DFF').

6. a) Desenează o piramidă regulată $VABCD$, cu vârful V. *5p*

b) În piramida regulată $VABCD$, cu vârful V, demonstrează că $AD \parallel (VBC)$. *5p*

c) Dacă $AV = AB$, determină măsura unghiului dintre dreptele VD și AB. *5p*

d) Dacă M este mijlocul segmentului BC, determină măsura unghiului dintre dreptele AD și VM. *5p*

7. În *Figura 14* $ABCDA'B'C'D'$ este un trunchi de piramidă regulată. Dacă muchia laterală a piramidei din care provine trunchiul are aceeași lungime cu muchia bazei mari a trunchiului de piramidă, determină măsura unghiului dintre dreptele AA' și CC'. *10p*

8. Se consideră conul circular drept VAB. Conul se secționează cu un plan paralel cu planul bazei astfel încât aria secțiunii este egală cu 9π cm^2. Știind că raportul dintre generatoarea trunchiului de con și generatoarea conului este $\frac{2}{5}$, determină raza cercului de la baza conului. *10p*

7. Exersezi și progresezi

1. Folosindu-te de *Figura 15*, precizează care dintre următoarele afirmații sunt adevărate și care sunt false:

a) dreptele d și e sunt coplanare;
b) dreptele d și e sunt paralele;
c) dreptele e și f sunt coplanare;
d) dreptele g și e sunt coplanare;
e) dreptele f și g sunt necoplanare;
f) dreptele d și f sunt paralele;
g) dreptele d și g sunt coplanare;
h) $AB \cap d = \emptyset$;
i) $AB \subset \alpha$;
j) $AB \parallel d$.

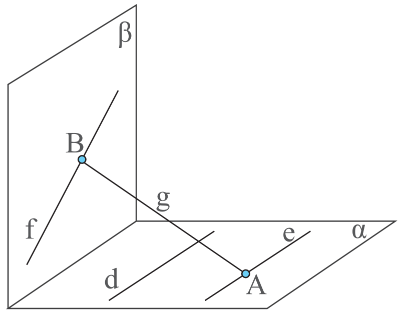


Figura 15

2. În *Figura 16* este ilustrată schița unui acoperiș reprezentat printr-o prismă dreaptă $ABCA'B'C'$ cu baza triunghi isoscel ($AB = BC$). Acoperișul trebuie construit astfel încât măsura unghiului ACB să fie de $10°$. Se consideră punctele M și M' mijloacele segmentelor AC și $A'C'$.

a) Dacă $AC = 10$ m, iar $\text{tg}\, 10° = 0{,}17$ determină lungimea segmentelor BM și $B'M'$ care reprezintă înălțimea acoperișului.
b) Demonstrează că $AMM'A'$ este dreptunghi.
c) Demonstrează că $MM' \parallel BB'$.
d) Determină măsura unghiului dintre dreptele BC și $A'B'$.

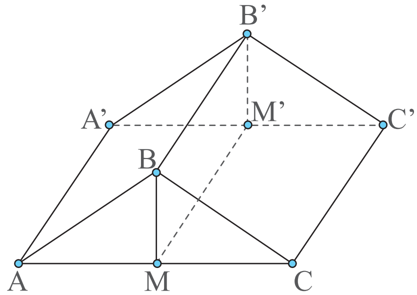


Figura 16

3. Știind că în *Figura 17* $ABCDEF$ reprezintă o prismă dreaptă cu baza triunghi echilateral, identifică câte două perechi de: i) drepte paralele; ii) drepte concurente; iii) drepte necoplanare; iv) o dreaptă și un plan astfel încât dreapta este conținută în planul respectiv; v) o dreaptă și un plan astfel încât dreapta „înțeapă” planul respectiv; vi) o dreaptă și un plan astfel încât dreapta este paralelă cu planul respectiv.

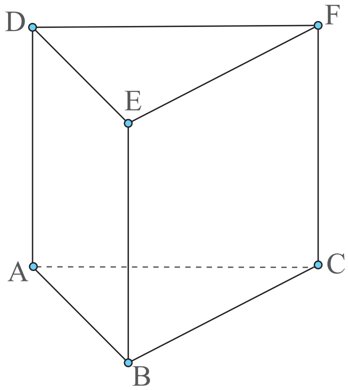


Figura 17

4. Se consideră piramida regulată $VABCD$ de vârf V cu baza pătratul $ABCD$ (*Figura 18*), M și N mijloacele muchiilor VB și VC, O centrul bazei $ABCD$, P mijlocul segmentului VO, Q mijlocul segmentului MN și R mijlocul muchiei BC. Demonstrează că:
a) $AB \parallel (VCD)$; b) $BC \parallel (VAD)$; c) $MN \parallel (ABC)$; d) $MN \parallel (VAD)$; e) punctele V, Q și R sunt coliniare; f) $(PMQ) \parallel (ABC)$.

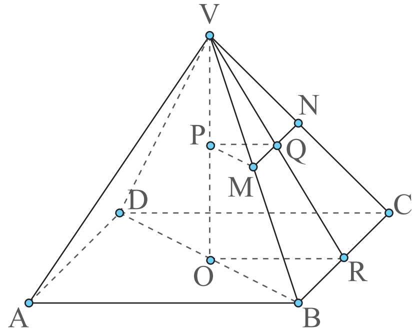


Figura 18

5. Se consideră cubul $ABCDA'B'C'D'$. Demonstrează următoarele relații de paralelism: a) $(ABC) \parallel (A'B'C')$; b) $(BCC') \parallel (ADD')$; c) $(ABB') \parallel (D'C'C)$.

6. Se consideră tetraedrul regulat $VABC$ și punctele $M \in VA$, $N \in VB$ și $P \in VC$ astfel încât $AM = BN = CP$. a) Demonstrează că $(MNP) \parallel (ABC)$. b) Demonstrează că triunghiul MNP este echilateral.

7. Oferă un contraexemplu pentru enunțul următor: „dacă $d \parallel \alpha$, $e \parallel \alpha$ și $d \parallel e$, atunci $(d,e) \parallel \alpha$."

8. Se consideră paralelipipedul dreptunghic $MNPQM'N'P'Q'$ și punctele A pe muchia MM', B pe muchia NN', C pe muchia PP' și D pe muchia QQ' astfel încât $AM = BN' = CP' = DQ$. Demonstrează că $(AND) \parallel (BCQ')$.

9. Se consideră trunchiul de piramidă regulată $ABCA'B'C'$ cu baza triunghi și M, N și P puncte pe muchiile laterale AA', BB', respectiv CC' astfel încât $AM = BN = CP$.
Demonstrează că $(MNP) \parallel (ABC)$.

10. Se consideră trunchiul de piramidă regulată $MNPM'N'P'$ cu baza triunghi, iar punctele O_1, O_2 și O_3 sunt pe fețele laterale ale trunchiului de piramidă astfel încât $MN' \cap M'N = \{O_1\}$, $NP' \cap N'P = \{O_2\}$ și $MP' \cap M'P = \{O_3\}$. a) Demonstrează că $(O_1O_2O_3) \parallel (MNP)$. b) Arată că triunghiul $O_1O_2O_3$ este echilateral.

11. Se consideră prisma dreaptă $ABCDA'B'C'D'$ cu baza pătrat, iar punctele O_1, O_2, O_3 și O_4 sunt centrele fețelor laterale ale prismei. Demonstrează că:
a) punctele O_1, O_2, O_3 și O_4 sunt coplanare;
b) planul determinat de punctele O_1, O_2, O_3 și O_4 este paralel cu planul bazei prismei;
c) poligonul determinat de punctele O_1, O_2, O_3 și O_4 este un pătrat.

12. Se consideră piramida regulată $VABC$ cu vârful V și cu baza triunghi (*Figura 19*), $(A'B'C') \parallel (ABC)$ o secțiune paralelă cu planul bazei astfel încât $AB = 2A'B'$, M mijlocul muchiei AB, N mijlocul segmentului CC', P mijlocul segmentului CM, Q mijlocul segmentului $A'B'$ și R mijlocul lui $A'C'$.
a) Dacă $VA = 12$ cm, determină lungimea segmentului AA'.
b) Demonstrează că $NP \parallel (ABC')$.
c) Demonstrează că $PQ \parallel (VBC)$.
d) Demonstrează că $(RQP) \parallel (VBC)$.

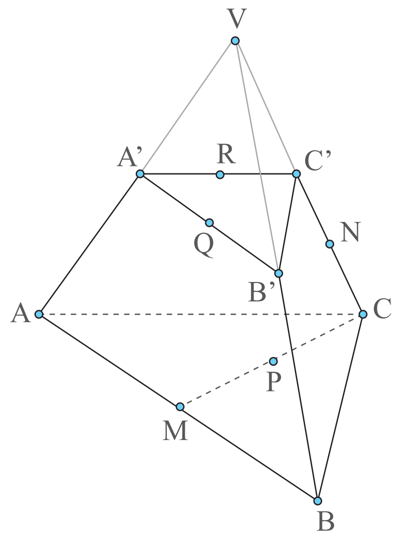


Figura 19

13. Se consideră paralelipipedul dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$ și punctele M, N, P și Q pe muchiile AA', BB', CC', respectiv DD', astfel încât $A'M = BN = CP = D'Q$. Demonstrează că dreptele MP și NQ sunt concurente.

14. Se consideră o piramidă regulată $VABCD$, punctul O mijlocul segmentului AC, punctul M mijlocul muchiei VA și punctul N mijlocul muchiei VB. Demonstrează că $(OMN) \parallel (VDC)$.