Unghi înscris în cerc. Coarde şi arce în cerc. Proprietăţi

Amintește-ți!

1. Folosind *Figura 1*, asociază fiecărui număr din coloana **A** litera corespunzătoare din coloana **B**.

A	**B**
1. BC	a) Rază
2. OA	b) Diametru
3. DE	c) Coardă în cerc care nu este diametru
4. $\overset{\frown}{AE}$	d) Tangentă la cerc
5. $\sphericalangle AOE$	e) Arc de cerc
	f) Unghi la centru

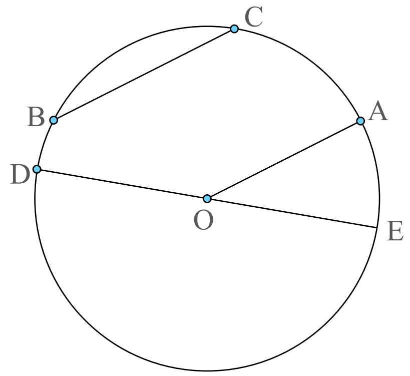


Figura 1

2. În *Figura 1*, măsura arcului de cerc AE este de $40°$. Ce măsură are unghiul AOE?

3. Folosind *Figura 2*, răspunde la următoarele întrebări:
a) Cum se numește unghiul AOB în raport cu triunghiul AOC?
b) Ce măsură are unghiul AOB din această figură?
c) Ce măsură are arcul mic AB?

4. Construiește un cerc cu raza de 3 cm și unghiul BAC cu vârful pe cerc și laturile coarde în cerc.

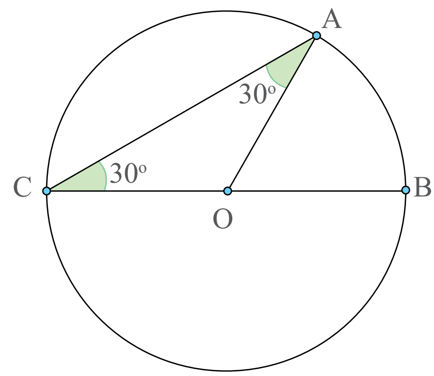


Figura 2

Important

• Numim **unghi înscris în cerc** unghiul cu vârful pe cerc și ale cărui laturi conțin două coarde ale cercului.

Exemplu: În Figura 3 unghiul BAC este un unghi înscris în cerc.

• Unghiul înscris în cerc are măsura egală cu jumătate din măsura arcului cuprins între laturi.

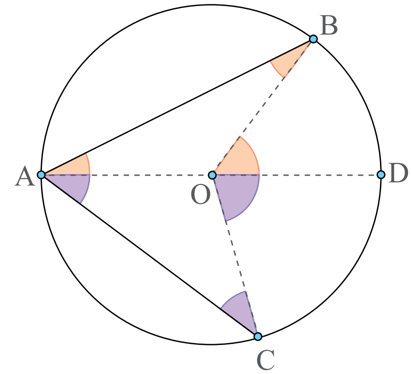


Figura 3

Ipoteză: $\sphericalangle BAC$ - unghi înscris în cerc.

Concluzie: $\sphericalangle BAC = \dfrac{\overset{\frown}{BC}}{2}$.

Demonstrație:

Construim diametrul AD și razele OB și OC, atunci $\sphericalangle BAC = \sphericalangle BAD + \sphericalangle CAD$ (*).

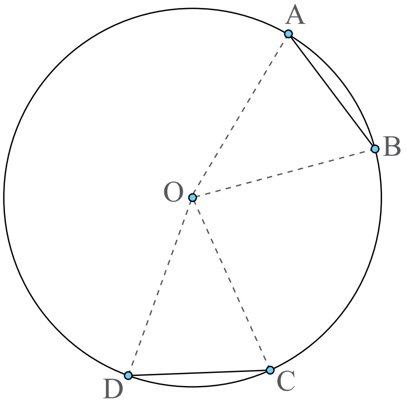
Triunghiul AOB este isoscel ($OA \equiv OB$), de unde $\sphericalangle BAO \equiv \sphericalangle ABO$. Pe de altă parte, unghiul BOD este unghi exterior triunghiului AOB și atunci $\sphericalangle BOD = \sphericalangle BAO + \sphericalangle ABO = 2 \cdot \sphericalangle BAD$, de unde $\sphericalangle BAD = \dfrac{\sphericalangle BOD}{2}$. Analog se arată că $\sphericalangle CAD = \dfrac{\sphericalangle COD}{2}$. Înlocuind în (*) obținem $\sphericalangle BAC = \dfrac{\sphericalangle BOD}{2} + \dfrac{\sphericalangle COD}{2} = \dfrac{\sphericalangle BOC}{2}$. Cum $\sphericalangle BOC$ este unghi la centru avem $\sphericalangle BOC = \widehat{BC}$ și atunci $\sphericalangle BAC = \dfrac{\widehat{BC}}{2}$.

Exemplu: Dacă arcul BC are măsura de $100°$, atunci măsura unghiului BAC este egală cu $50°$.

• Orice unghi drept se înscrie într-un semicerc.

Justificare: Dacă unghiul înscris în cerc are măsura de $90°$, atunci arcul cuprins între laturi are $180°$, adică este un semicerc, iar arcul în care este înscris unghiul este celălalt semicerc.

• În oricare cerc, la arce congruente corespund coarde congruente.



Ipoteză: $\widehat{AB} \equiv \widehat{CD}$.

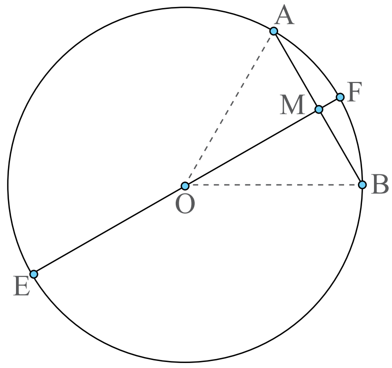
Concluzie: $AB \equiv CD$.

Demonstrație: Construim razele OA, OB, OC și OD. În triunghiurile AOB și COD avem $OA \equiv OC$ și $OB \equiv OD$ (raze în cerc); $\sphericalangle AOB \equiv \sphericalangle COD$ (sunt unghiuri la centru și au măsura egală cu măsura arcului cuprins între laturi). Rezultă, conform cazului LUL de congruență a triunghiurilor, că $\triangle AOB \equiv \triangle COD$, de unde $AB \equiv CD$.

• În oricare cerc, la coarde congruente corespund arce congruente.

Justifică această afirmație, folosind modelul de mai sus!

• În oricare cerc, diametrul perpendicular pe o coardă trece prin mijlocul coardei și prin mijlocul arcului determinat de coardă.



Ipoteză: EF – diametru; $EF \perp AB$.

Concluzie: $AM \equiv BM$, $\widehat{AF} \equiv \widehat{BF}$.

Demonstrație: Construim razele OA și OB și obținem triunghiul isoscel AOB ($OA \equiv OB$). În acest triunghi OM este înălțime ($EF \perp AB$) prin urmare este și mediană și bisectoare.
Fiind mediană rezultă că $AM \equiv BM$.
Fiind bisectoare $\sphericalangle AOF \equiv \sphericalangle BOF$, de unde $\widehat{AF} \equiv \widehat{BF}$ (unghiurile la centru au măsura egală cu măsura arcului cuprins între laturi).

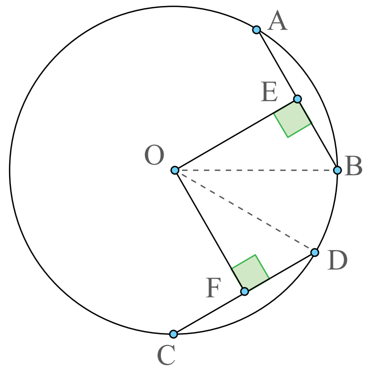
• În oricare cerc, dacă un diametru trece prin mijlocul unei coarde, atunci el este perpendicular pe coardă.

Justifică această afirmație, folosind modelul de mai sus!

• În oricare cerc, dacă un diametru trece prin mijlocul unui arc, atunci el este perpendicular pe coarda care subîntinde arcul.

Justifică această afirmație, folosind modelul de mai sus!

• În oricare cerc, coardele congruente sunt egal depărtate de centrul cercului.



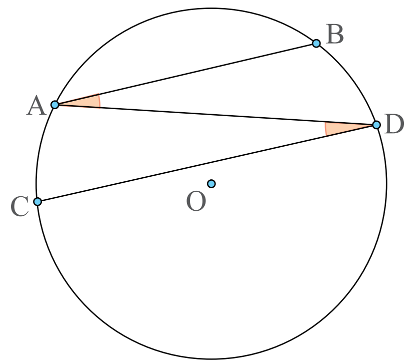
Ipoteză: $AB \equiv CD$; $OE \perp AB$; $OF \perp CD$; $E \in AB$; $F \in CD$

Concluzie: $OE \equiv OF$.

Demonstrație: Avem $AE = BE = \dfrac{AB}{2}$ (OE face parte dintr-un diametru și este perpendicular pe coarda AB). Analog $CF = DF = \dfrac{CD}{2}$. Rezultă $BE \equiv FD$.

Construim razele OB și OD și obținem triunghiurile dreptunghice OEB și OFD în care $BE \equiv FD$ (din demonstrație) și $OB \equiv OD$ (raze în cerc). Rezultă, conform cazului IC de congruență a triunghiurilor dreptunghice, că $\triangle OEB \equiv \triangle OFD$, de unde $OE \equiv OF$.

• În oricare cerc două coarde paralele determină două arce congruente.



Justificare: Unim punctul A cu punctul D. Dacă $AB \parallel CD$ și AD secantă, atunci $\sphericalangle BAD \equiv \sphericalangle CDA$. De aici, $\dfrac{\overset{\frown}{BD}}{2} = \dfrac{\overset{\frown}{AC}}{2}$, adică $\overset{\frown}{BD} \equiv \overset{\frown}{AC}$.

Exersează!

5. Folosind informaţiile din *Figurile 4 – 6*, rezolvă cerinţele fiecărui subpunct.

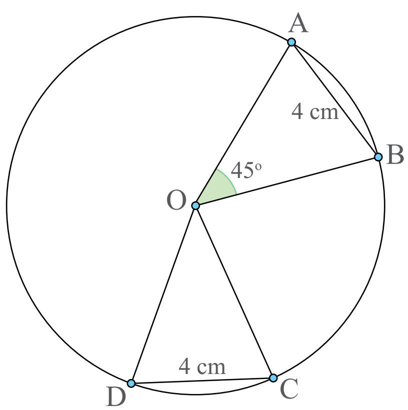


Figura 4

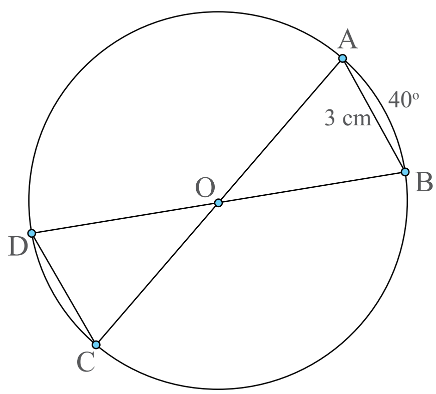


Figura 5

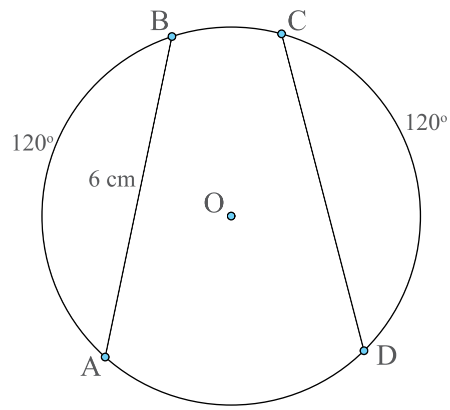


Figura 6

a) Care este măsura arcului $\overset{\frown}{AB}$ din *Figura 4*?
b) Care este lungimea segmentului CD din *Figura 5*?
c) Care este măsura arcului $\overset{\frown}{CD}$ din *Figura 4*?
d) Care este măsura arcului mic $\overset{\frown}{BC}$ din *Figura 5*?
e) Care este lungimea segmentului CD din *Figura 6*?
f) Ce măsură are unghiul CDB din *Figura 5*?

Portofoliu

6. Pe un cerc de centru O se află n puncte. Segmentele determinate de oricare două puncte consecutive au lungimi egale. Realizează un desen corespunzător şi calculează măsurile arcelor determinate de două puncte consecutive situate pe cerc, dacă: a) $n = 4$; b) $n = 5$; c) $n = 6$; d) $n = 8$. Așază desenul în portofoliul **Despre geometria cercului**.

7. Pe un cerc de centru O se consideră punctele A, B, C şi D astfel încât AB este diametru, iar punctele C şi D sunt situate astfel încât $AB \perp CD$. Care este măsura arcului $\overset{\frown}{AC}$, dacă $\overset{\frown}{BD} = 35°$?

8. În *Figura 7*, punctele A şi F sunt coliniare cu centrul cercului. Segmentele AB, BC, CD, DE şi EF au lungimi egale. De asemenea, segmentele AH, HG şi GF au lungimi egale. Calculează măsura arcului determinat de oricare două puncte consecutive aflate pe cerc.

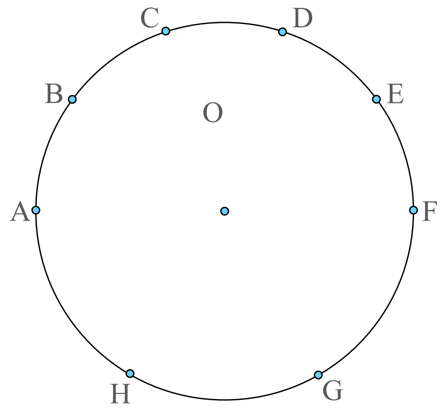


Figura 7

9. a) Cristina şi Matei fac întrecere pe un teren de joacă ce are forma unui disc (*Figura 8*). Ei pleacă simultan din punctul A şi aleargă până în punctul B. Cristina aleargă pe marginea discului, în timp ce Matei aleargă în linie dreaptă. Care dintre ei va câştiga întrecerea ştiind că cei doi au aceeaşi viteză? De ce? b) Cristina aleargă din punctul A până în punctul C, iar Matei aleargă din punctul D până în punctul B (*Figura 9*). Amândoi parcurg aceeaşi distanţă. Ce putem spune despre distanţele (în linie dreaptă) dintre punctele A şi B, respectiv C şi D?

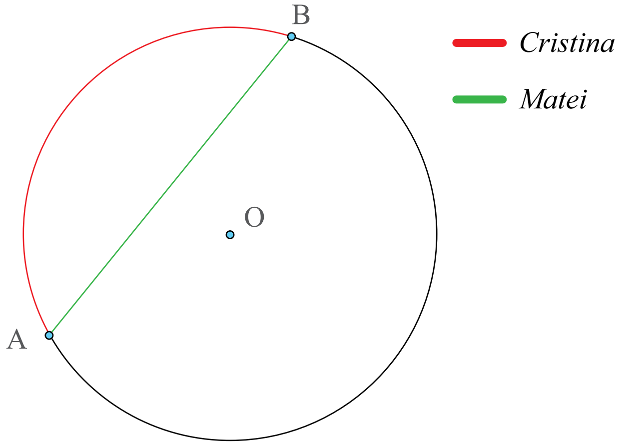


Figura 8

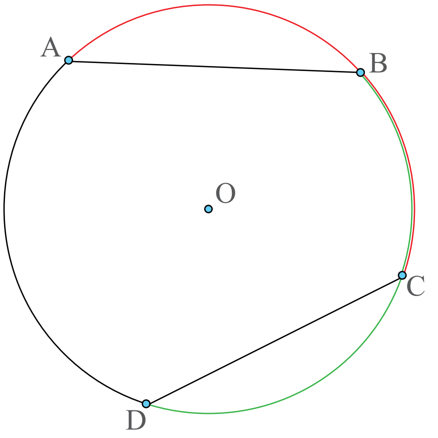


Figura 9

10. Determină măsurile unghiurilor marcate cu simbolul „?”, folosind informaţiile din *Figurile 10 – 12*:

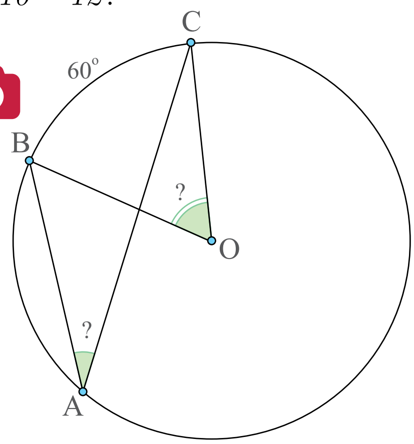


Figura 10

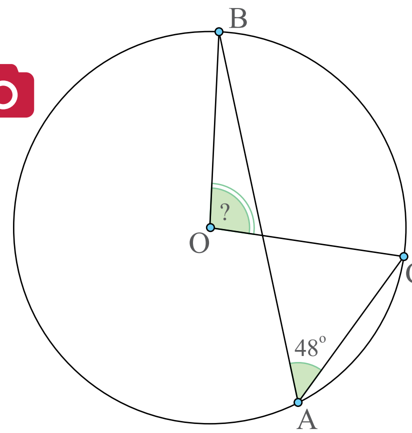


Figura 11

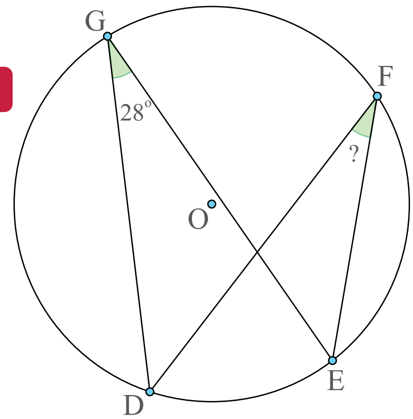


Figura 12

11. Steaua din *Figura 13* are toate unghiurile egale. Determină măsura unghiurilor marcate.

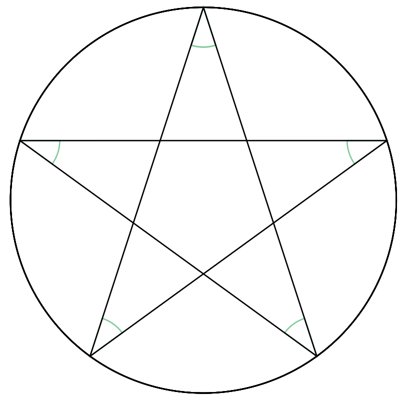


Figura 13

12. Pe un cerc de centru O se consideră punctele A, B, C astfel încât punctele A, B şi O sunt coliniare. Care este măsura unghiului ACB?

13. Pe un cerc de centru O se consideră punctele A, B şi C astfel încât AB este diametru şi $AC = BC$. Care este măsura unghiului CAB?

14. Determină valoarea lui x în fiecare caz reprezentat în *Figurile 14 – 16*.

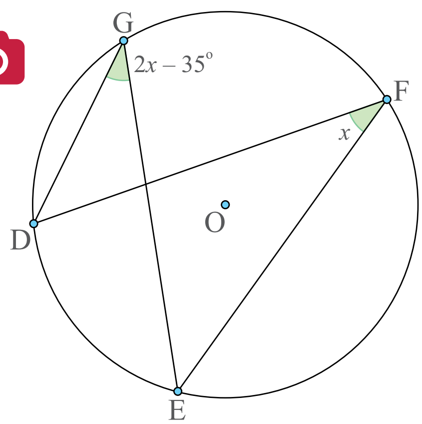


Figura 14

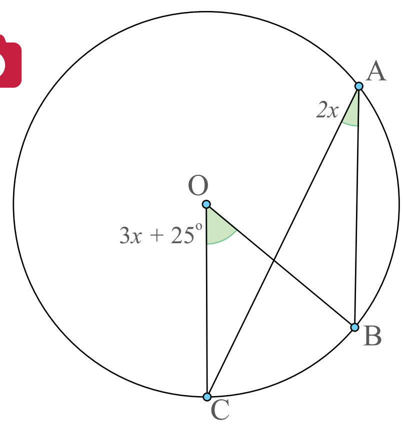


Figura 15

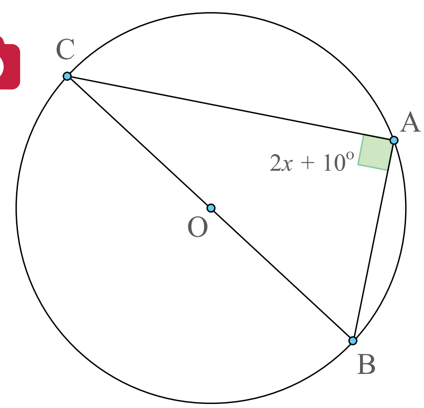


Figura 16

Portofoliu

15. Pe un cerc de centru O se consideră punctele A ,B, C şi D, astfel încât AB şi CD nu sunt diametre. Distanţele de la O la coardele AB , respectiv CD sunt egale. Arată că triunghiurile OAB şi OCD au arii egale. Așază desenul în portofoliul **Despre geometria cercului**.

Tangente dintr-un punct exterior la un cerc

Amintește-ți!

1. Ajută-l pe Victor să răspundă la următoarele întrebări:

a) Cum se numește dreapta d_1 în raport cu cercul de centru O_1?

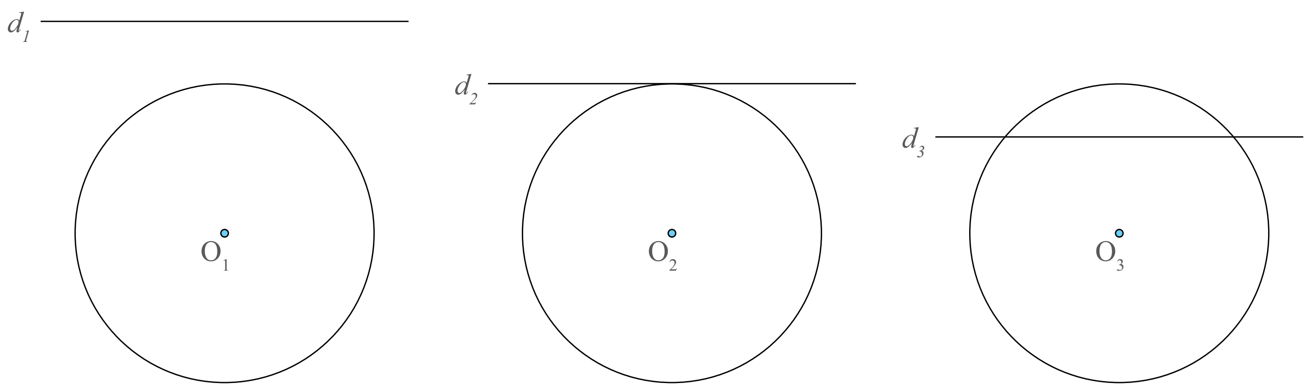
b) Cum este distanța de la O_1 la d_1 față de raza cercului?

c) Cum se numește dreapta d_2 în raport cu cercul de centru O_2?

d) Cum este distanța de la O_2 la d_2 față de raza cercului?

e) Cum se numește dreapta d_3 în raport cu cercul de centru O_3?

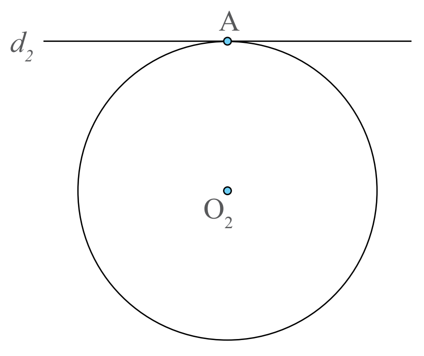
f) Cum este distanța de la O_3 la d_3 față de raza cercului?



Important

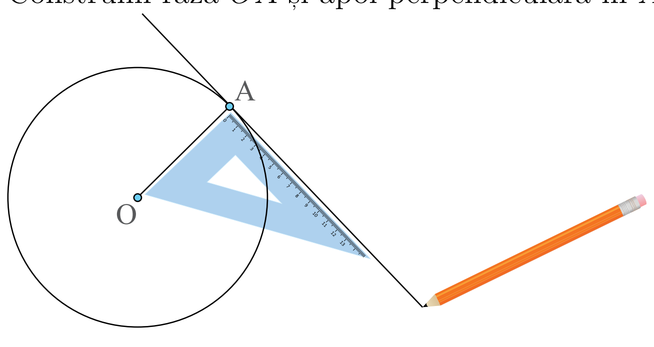
• Dacă o dreaptă este tangentă la cerc, atunci raza în punctul de tangență este perpendiculară pe tangentă.

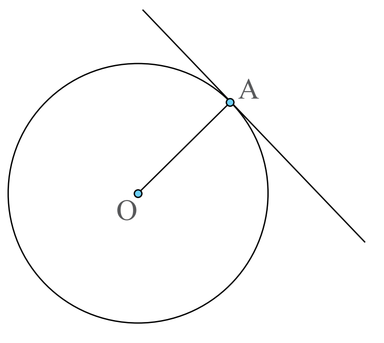
Exemplu: Dacă d este tangentă la cerc, atunci $OA \perp d$.



• Cum construim tangenta la cerc într-un punct de pe cerc?

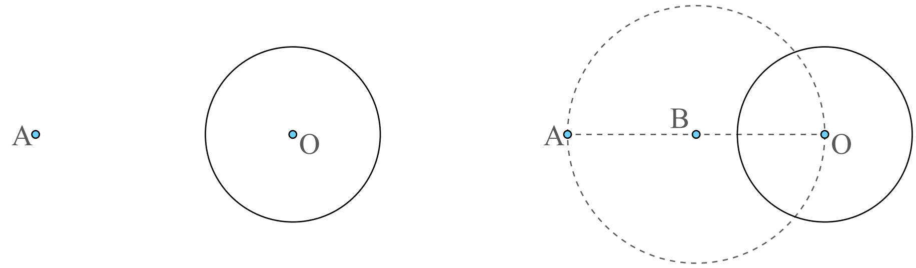
Construim raza OA și apoi perpendiculara în A pe OA.



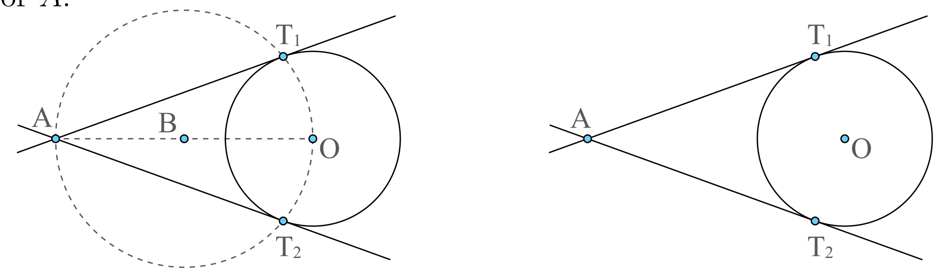


• Cum construim tangenta la cerc dintr-un punct exterior cercului?

Pasul 1. Determinăm punctul B, mijlocul segmentului AO și construim cercul cu centrul în B și raza $\dfrac{AO}{2}$.



Pasul 2. Punctele în care cercul construit la pasul 1 intersectează cercul dat sunt punctele de tangență. (Un unghi drept se înscrie într-un semicerc, iar raza trebuie să fie perpendiculară pe tangentă). Dreptele determinate de punctul A cu punctele T_1 și T_2 sunt tangentele la cerc din punctul exterior A.

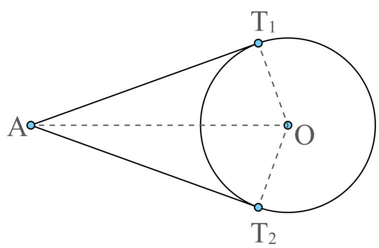


• Dacă AT_1 și AT_2 sunt tangentele la cerc din punctul exterior A, atunci segmentele AT_1 și AT_2 sunt congruente (Teorema ciocului de cioară).

Ipoteză: AT_1, AT_2 tangente la cerc.

Concluzie: $AT_1 \equiv AT_2$.

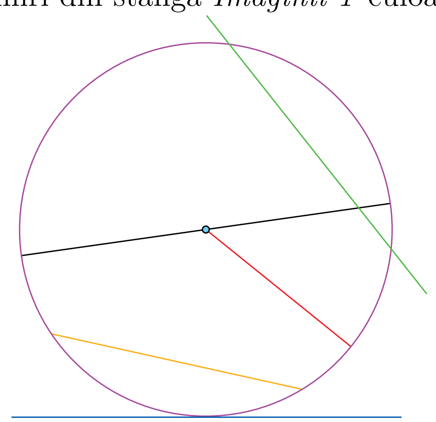
Demonstrație. În triunghiurile dreptunghice AOT_1 și AOT_2 avem, $AO \equiv AO$ (latură comună); $OT_1 \equiv OT_2$ (raze în cerc). Rezultă, conform cazului IC de congruență a triunghiurilor dreptunghice, că $\triangle AOT_1 \equiv \triangle AOT_2$, de unde $AT_1 \equiv AT_2$.



Exersează!

2. Asociază fiecărei denumiri din stânga *Imaginii 1* culoarea corespunzătoare din dreapta ei.

Diametru	albastru
Secantă	galben
Tangentă	roșu
Coardă	negru
	verde



Imaginea 1 – Elemente în cerc

Portofoliu

3. Construieşte un cerc cu raza de 5 cm. Fixează 3 puncte A, B şi C situate pe cerc. Construieşte tangentele la cerc în acele puncte. Așază desenul în portofoliul **Despre geometria cercului**.

4. Construieşte un cerc cu raza de lungime 3 cm. Fixează două puncte A, respectiv B, astfel încât segmentul AB să fie diametrul cercului. Construieşte tangentele la cerc în cele două puncte. Care este poziţia relativă a celor două tangente? Argumentează! Dacă cercul ar avea raza de lungime 5 cm această proprietate se păstrează? Așază desenul în portofoliul **Despre geometria cercului**.

5. Construieşte un cerc de centru O cu raza de lungime 4 cm. Fixează un punct P în exteriorul cercului astfel încât $OP = 10$ cm. Construieşte tangentele la cerc din punctul P. Așază desenul în portofoliul **Despre geometria cercului**.

6. Se consideră un cerc de centru O şi raza de 6 cm. O tangentă dusă dintr-un punct T, exterior cercului, intersectează cercul în punctul D. Determină aria triunghiului TOD, știind că $TD = 8$ cm.

7. Dacă AT_1 și AT_2 sunt tangentele la cerc din punctul exterior A, demonstrează că OA este mediatoarea segmentului T_1T_2, unde O este centrul cercului.

8. Se consideră un cerc de centru O şi AT_1, AT_2 tangentele la cerc duse dintr-un punct exterior A. Fie B şi C punctele în care AO intersectează cercul. Demonstrează că:
a) $BT_1 \equiv BT_2$;
b) $CT_1 \equiv CT_2$.

9. Precizează denumirile a trei drepte distincte care trec printr-un punct exterior unui cerc și intersectează cercul în exact trei puncte.

10. Câte drepte pot trasa printr-un punct exterior unui cerc, astfel încât fiecare dintre acestea să intersecteze cercul în exact un punct?

11. Se consideră P un punct exterior cercului de centru O. Tangentele la cerc, duse prin punctul P, intersectează cercul în punctele E şi F. Dacă $\sphericalangle EPO = 30°$, ce măsură are unghiul OFE?

12. Punctele A, B şi C sunt situate pe un cerc astfel încât AB este diametru. Tangenta la cerc, dusă din punctul B, intersectează dreapta AC în D. Dacă $CD = CA$, calculează:
a) măsura arcului CB;
b) măsura unghiului ADB.

Poligoane regulate înscrise în cerc - construcție, măsuri de unghiuri

Conturul unei piulițe este un poligon regulat.

Piulițele sunt prezente la aproape toate îmbinările dintre două piese ale unei mașini.

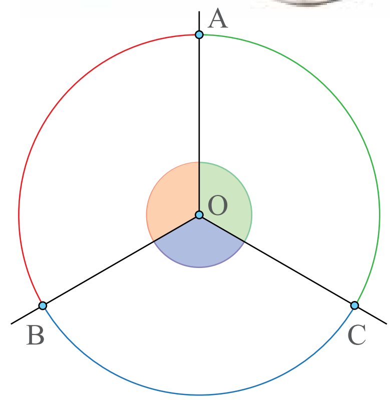
Observă și descoperă!

1. Observă dialogul dintre cei doi copii, apoi rezolvă sarcina de lucru propusă.

Sara către Victor: Trebuie să împart un cerc în trei arce congruente și nu reușesc.

Victor: Nu este foarte dificil. Un cerc are 360°. Dacă cele trei arce sunt congruente, fiecare trebuie să aibă câte 120°. Construim în jurul punctului O, centrul cercului, trei unghiuri cu măsura de 120°. Ceea ce a rezultat arată ca în *Imaginea 2*.

Desenează un cerc și, folosind procedeul descris de Victor, împarte-l în cinci arce congruente.



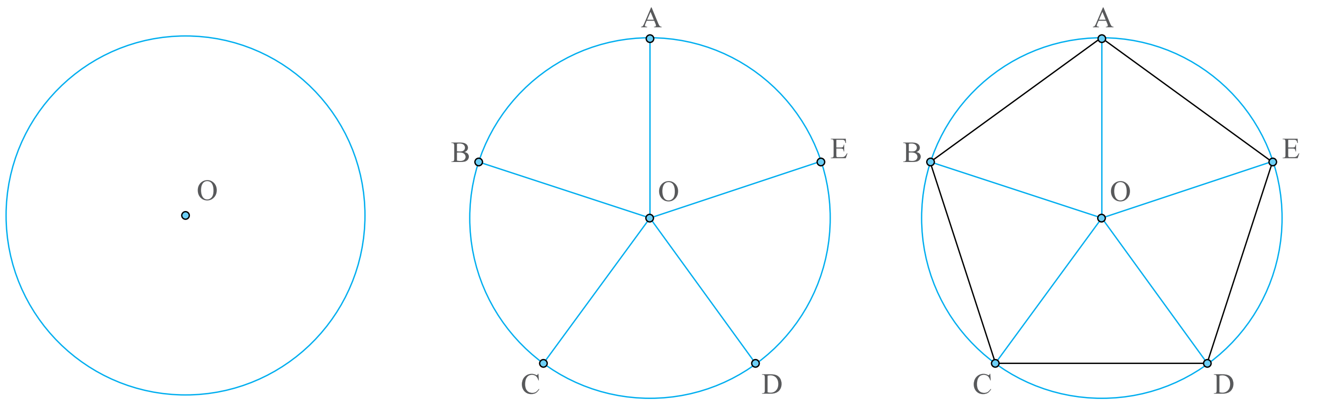
Imaginea 2 – Cerc împărțit în trei arce congruente

Important

- Numim **poligon regulat** un poligon cu toate laturile și toate unghiurile congruente.

Exemple: ***Triunghiul*** *echilateral este un poligon regulat.* ***Pătratul*** *este un poligon regulat. Începând cu poligoanele care au cinci sau mai multe laturi nu mai există denumiri speciale; vom spune* ***pentagon regulat*** *pentru poligonul cu cinci laturi și cinci unghiuri congruente și* ***hexagon regulat*** *pentru poligonul cu șase laturi și șase unghiuri congruente.*

- Cum construiesc un pentagon regulat?



Pasul 1.

Desenez un cerc.

Pasul 2. Împart cercul în cinci arce congruente, folosind raportorul pentru a obține 5 unghiuri congruente în jurul unui punct. Fiecare arc are 72°.

Pasul 3.

Unesc punctele determinate la pasul 2.

Justificare: Avem $AB \equiv BC \equiv CD \equiv DE \equiv EA$, deoarece, într-un cerc, la arce congruente corespund coarde congruente. Acum, unghiul BAE este un unghi înscris în cerc și atunci

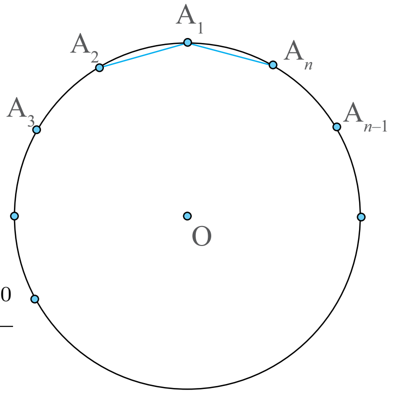
$\sphericalangle BAE = \dfrac{\widehat{BCDE}}{2} = \dfrac{\widehat{BC}}{2} + \dfrac{\widehat{CD}}{2} + \dfrac{\widehat{DE}}{2}$. Cum $\widehat{BC} = \widehat{CD} = \widehat{DE} = 72°$, rezultă

$\sphericalangle BAE = \dfrac{3 \cdot 72°}{2} = 108°$. Analog, găsim $\sphericalangle ABC = \sphericalangle BCD = \sphericalangle CDE = \sphericalangle DEA = 108°$. Prin urmare și toate unghiurile sunt congruente. Așadar, $ABCDE$ este un poligon regulat.

- Măsura unui unghi al unui poligon regulat cu n laturi este $\dfrac{(n-2) \cdot 180°}{n}$.

Justificare: Pentru a construi un poligon regulat cu n laturi, un cerc trebuie împărțit în n arce congruente. Măsura unui astfel de arc este egală cu $\dfrac{360°}{n}$.

Oricare unghi al poligonului este un unghi înscris în cerc și cuprinde, între laturile sale, $n-2$ arce cu măsura de $\dfrac{360°}{n}$.



Avem, $\sphericalangle A_2A_1A_n = \dfrac{(n-2) \cdot \dfrac{360°}{n}}{2} = \dfrac{(n-2) \cdot 360°}{n} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{(n-2) \cdot 180^0}{n}$

(măsura unghiului înscris în cerc este jumătate din măsura arcului cuprins între laturile sale).

Exemplu: Deoarece pătratul este un poligon regulat, putem verifica. Măsura unui unghi al unui pătrat este $\dfrac{(4-2) \cdot 180°}{4} = \dfrac{2 \cdot 180°}{4} = 90°$.

Exersează!

2. Construiește, cu ajutorul unui cerc cu raza de 3 cm, un triunghi echilateral, un pătrat și un hexagon regulat.

Portofoliu

3. Folosind doar compasul și raportorul, desenează un: a) Octogon regulat (poligon cu 8 laturi); b)Decagon regulat (poligon cu 10 laturi); c) Dodecagon regulat (poligon cu 12 de laturi). Așază desenele în portofoliul **Despre geometria cercului**.

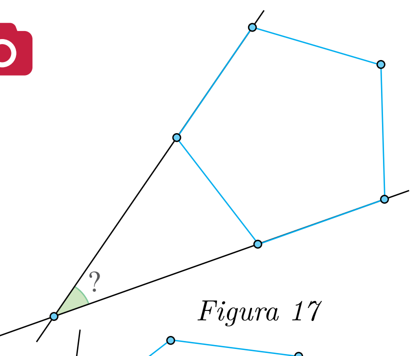


Figura 17

4. Determină măsura unui unghi al unui:
a) pentagon regulat;
b) hexagon regulat;
c) octogon regulat.

5. Determină măsurile unghiurilor marcate, ştiind că poligoanele din *Figurile 17 – 18* sunt poligoane regulate.

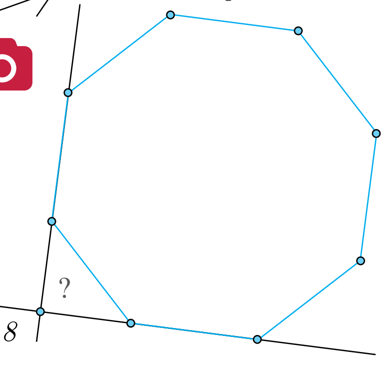


Figura 18

6. Steaua din *Figura 19* are toate vârfurile situate pe cerc şi toate unghiurile egale. Ce poligon obţinem dacă unim vârfurile stelei? Argumentează răspunsul dat.

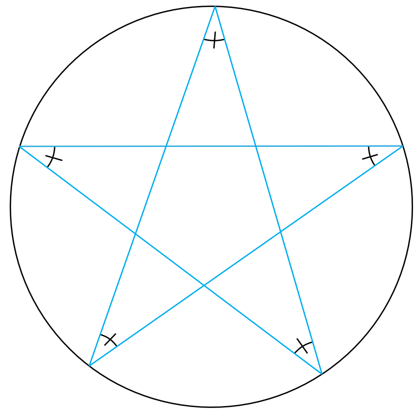


Figura 19

Portofoliu

7. Desenează un pentagon regulat, $ABCDE$, înscris într-un cerc de centru O. Se consideră M, N, P, Q şi R mijloacele arcelor AB, BC, CD, DE, respectiv EA. Verifică dacă $AMBNCPDQER$ este decagon regulat. Argumentează răspunsul dat. Așază desenul în portofoliul **Despre geometria cercului**.

8. Luana a început construcţia unui poligon regulat (*Figura 20*) pe caietul de geometrie. După ce a construit patru puncte, a constatat că punctele A, E şi O sunt coliniare. Ce poligon vrea să construiască Luana?

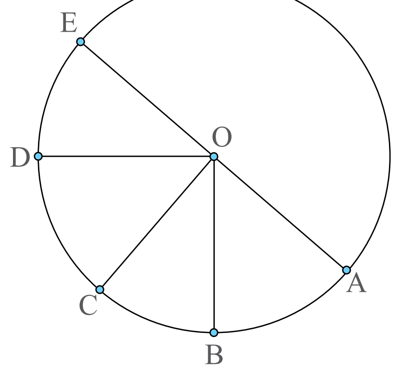


Figura 20

9. Mihnea a construit poligonul regulat $A_1A_2...A_n$. Cu cât este egal n, ştiind că arcul mic A_1A_5 are măsura de:

a) $120°$; b) $80°$; c) $60°$?

10. Raluca a construit poligonul regulat $A_1A_2...A_n$. Cu cât este egal n, ştiind că unghiul OA_1A_2 are măsura de:

a) $72°$; b) $75°$; c) $81°$?

11. a) Orice poligon cu toate laturile egale este regulat? Argumentează!

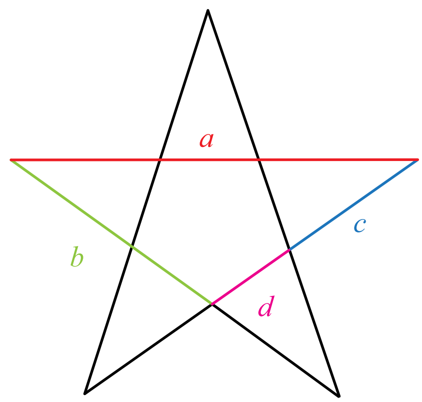
b) Orice poligon cu toate laturile egale, înscris într-un cerc, este regulat? Argumentează!

Știați că...

În *Imaginea 3* avem desenată o pentagramă. O pentagramă este o stea cu cinci colţuri. Numele ei provine din limba greacă de la cuvântul *pentagrammon* care înseamnă cu cinci linii.

Cele patru distanţe colorate în imagine sunt determinate de intersecţiile celor cinci linii. Aceste distanţe au o proprietate specială: raportul lor este egal cu numărul de aur.

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d} = \Phi \cong 1{,}618$$



Imaginea 3 - Pentagramă

12. **Lucrează în echipă (3-4 membri).** Fiecare membru al echipei desenează câte o pentagramă de dimensiuni diferite. Măsoară cele patru segmente indicate mai sus şi calculează valoarea celor trei rapoarte. Sunt egale cu numărul de aur? De ce crezi că se întâmplă acest fapt? Cum apreciezi rezultatele obţinute de tine în comparaţie cu numărul de aur?

Indiciu: Pentru a realiza pentagrama, desenează un pentagon regulat înscris într-un cerc şi apoi uneşte corespunzător vârfurile pentagonului.

Lungimea cercului și aria discului

Fără lungimea cercului nu am putea să știm ce distanță am parcurs cu mașina.

Observă și descoperă!

1. Observă dialogul dintre cei doi copii, apoi rezolvă sarcina de lucru propusă.

Sara către Victor: Se poate vorbi de perimetrul unui cerc?

Victor: Desigur, dar nu se mai numește perimetru; se numește lungimea cercului. Să-ți arăt!

Victor a marcat cu vopsea un loc de pe roata din față a bicicletei sale și de fiecare dată când acesta ajunge pe asfalt lasă un semn, ca în Imaginea 4.

Imaginea 4 – Urme de vopsea lăsate de o roată de bicicletă

Distanța dintre două astfel de semne reprezintă lungimea cercului. Știind că distanța dintre două semne consecutive este de 94 cm, ce distanță a parcurs Victor, dacă pe asfalt sunt 100 de semne?

Important

• Lungimea cercului se determină cu formula $L_{\text{cerc}} = 2\pi R$, unde R este raza cercului, iar π este un număr irațional a cărui valoare aproximativă este 3,14 și reprezintă raportul dintre lungimea cercului și diametrul acestuia.

Exemplu: Lungimea unui cerc cu raza de 30 cm este $L_{cerc} = 2\pi \cdot 30 = 60\pi \cong 60 \cdot 3{,}14 = 188{,}4$ cm. De regulă, lungimea cercului se dă sub forma 60π, înlocuirea se face numai în cazuri speciale.

• Un disc este suprafața delimitată de un cerc.

• Aria unui disc se determină cu formula $\mathcal{A}_{\text{disc}} = \pi R^2$, unde R este raza cercului, iar valoarea aproximativă a lui π este 3,14.

Exemplu: Aria unui disc cu raza de 30 cm este $\mathcal{A}_{disc} = \pi \cdot 30^2 = 900\pi \approx 900 \cdot 3{,}14 = 2\,826$ cm^2. De regulă, aria discului se dă sub forma 900π, înlocuirea se face numai în cazuri speciale.

Exersează!

2. Determină lungimea cercului şi aria discului care are raza egală cu:
a) 3 cm; b) 7 cm; c) 1,2 m; d) 2,1 dm.

3. Determină lungimea cercului şi aria discului care are diametrul egal cu:
a) 4 m; b) 10 m; c) 9 cm.

4. Determină raza cercului, ştiind că aria discului este egală cu: a) 64π m^2; b) 81π cm^2; c) 50π m^2.

5. Determină diametrul unui cerc a cărui lungime este egală cu: a) 44π cm; b) 12π m; c) 7π dam.

6. Determină lungimea unui cerc, știind că aria discului este egală cu:
a) 64π cm^2; b) 121π cm^2; c) 20π cm^2.

Imaginea 5 – Stropitoare

7. O stropitoare, ca în *Imaginea 5*, poate uda toată iarba aflată la o distanţă de cel mult 5 m. Arată că suprafaţa ce poate fi udată de stropitoare este mai mare de 78,5 m^2.

Indiciu: Foloseşte faptul că $3{,}14 < \pi < 3{,}15$.

8. Vlad şi Maria participă la cursuri de echitaţie. Vlad călăreşte un cal legat de un par cu o frânghie care are lungimea de 3,5 m, iar Maria călăreşte un cal legat de un par cu o frânghie care are lungimea de 2 m. Vlad a făcut 30 de ture, iar Maria 50 de ture. Care dintre ei a parcurs o distanţă mai mare şi cu cât? Aproximează distanţa folosind aproximarea $\pi \cong 3{,}14$.

Imaginea 6 – Grădină

9. Raluca are o grădină circulară, ca în *Imaginea 6*, al cărei diametru este de 20 m. În interiorul grădinii se află opt copăcei. În jurul fiecărui copăcel se află pietricele pe o rază de 1 metru. Restul suprafeţei grădinii este acoperită cu iarbă. Arată că suprafaţa acoperită cu iarbă are aria de cel puţin 92π m^2. În ce situaţie suprafaţa acoperită cu iarbă este mai mare de 92π m^2?

10. Determină aria suprafeţei colorate, din *Figurile 21 – 25*, în fiecare caz:

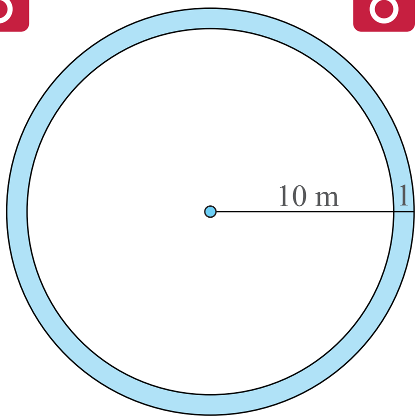


Figura 21

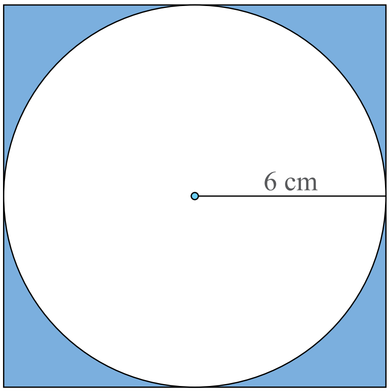


Figura 22

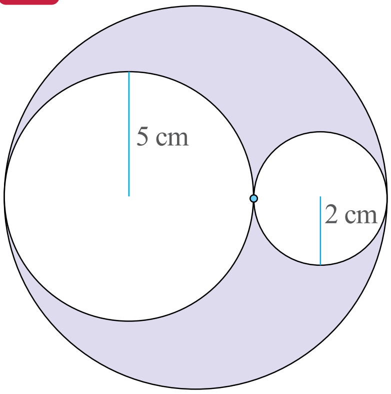


Figura 23

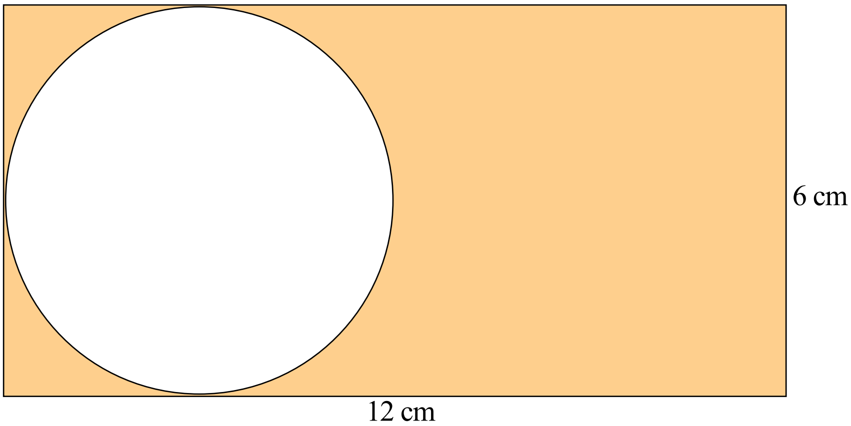


Figura 24

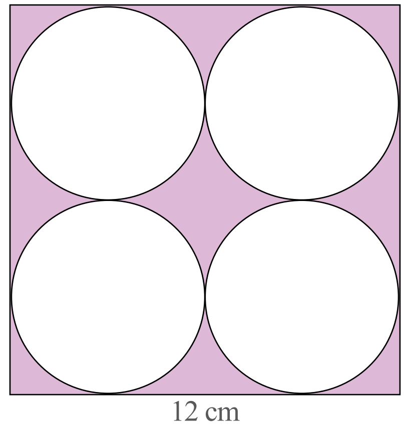


Figura 25

11. Câte rotaţii complete realizează roata unui autobomil, cu circumferinţa de 200 cm, pe o distanţă de: a) 5 km; b) 12 km; c) 34 km.

12. Pe distanţa de 2 km, câte rotaţii complete realizează o roată cu raza egală cu:
a) 25 cm ; b) 20 cm; c) 22 cm. ($\pi \cong 3{,}14$)

13. **Lucrează în echipă**. Calculați numărul de rotaţii ale roții unui automobil pentru a parcurge o distanță de 60 km.

Pe majoritatea anvelopelor se găseşte o inscripţie asemănătoare cu cea din *Imaginea 7*. Semnificaţiile numerelor sunt următoarele:

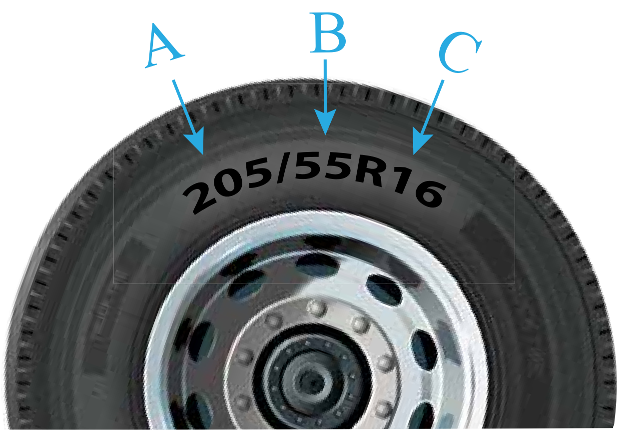
A - lăţimea anvelopei exprimată în milimetri;

B – raport nominal de aspect (raportul dintre secţiunea transversală şi lăţimea anvelopei);

C – diametrul intern al anvelopei (diametrul jantei pe care se fixează roata). Acesta este exprimat în inchi (1 inch = 25,4 mm).

Putem calcula diametrul exterior al anvelopei cu următoarea formulă:

$$\text{Diametru} = 2A \cdot \frac{B}{100} + C.$$



Imaginea 7 – Inscripție anvelopă

Exemplu: Diametrul anvelopei din *Imaginea 7* este: $2 \cdot 205 \cdot \dfrac{55}{100} + 16 \cdot 25{,}4 = 631{,}9$ mm.

Circumferinţa anvelopei este: $2\pi R = D \cdot \pi = 631{,}9 \cdot 3{,}141592 = 1\,985{,}17$ mm.

Pentru o precizie cât mai mare am folosit următoarea aproximare: $\pi \cong 3{,}141592$.

Pentru a calcula numărul de rotaţii complete ale roţii, facem raportul dintre distanţa totală şi circumferința roţii: $60\,000\,000 : 1\,985{,}17 = 30\,224{,}11$ rotaţii complete.

Aveţi grijă ca ambele lungimi să fie exprimate în aceeaşi unitate de măsură.

Calculaţi numărul de rotaţii complete ale unei roţi, realizate pe 60 de km, dacă pe anvelopă sunt inscripționate următoarele date:

315/80R22 **215/65R16** **195/65R15**

La acest exercițiu poţi folosi calculatorul științific.

Recapitulare

1. Pe un cerc, se consideră punctele A, B, C şi D în această ordine. Arată că, dacă $\widehat{ABC} = \widehat{DCB}$, atunci $AB = CD$.

2. În *Figura 26*, E este mijlocul coardei CD, iar CF este tangent la cerc. Arată că unghiurile COF şi ECF sunt congruente.

3. Pe un cerc, de centru O, se consideră punctele A, B, C şi D, astfel încât AB este diametru, iar punctele C şi D sunt situate în cele două semicercuri determinate de AB. Dacă $\widehat{AC} = 110°$ şi $\widehat{BD} = 70°$, arată că $AB \perp CD$.

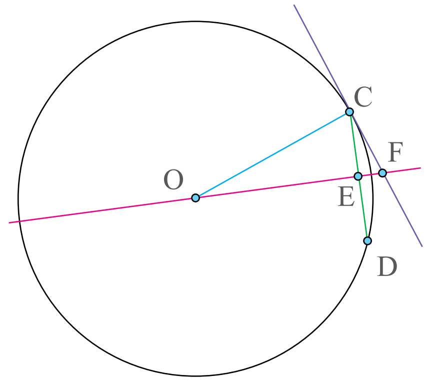


Figura 26

4. Determină măsurile unghiurilor necunoscute, reprezentate în *Figurile 27 – 29*:

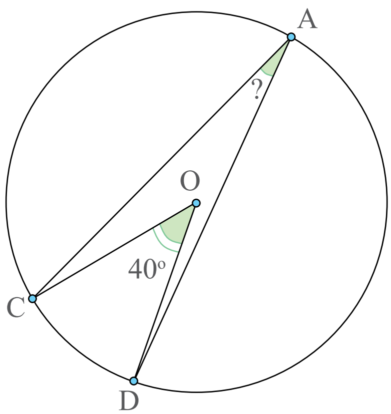


Figura 27

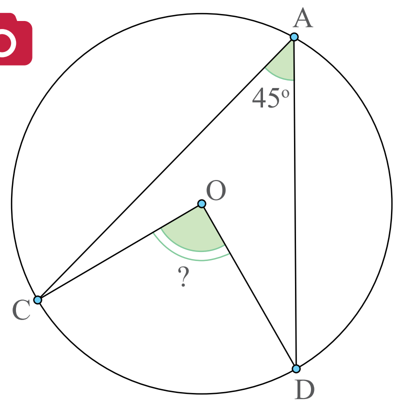


Figura 28

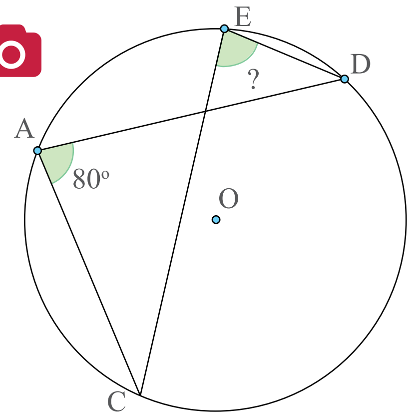


Figura 29

5. Se consideră punctele A, B, respectiv C situate pe un cerc. Cât este suma măsurilor unghiurilor ABC, BCA şi CAB?

6. Cercurile din *Figura 30* au raze egale, iar CD este tangentă la cele două cercuri. Arată că centrele celor două cercuri și mijlocul segmentului CD sunt trei puncte coliniare.

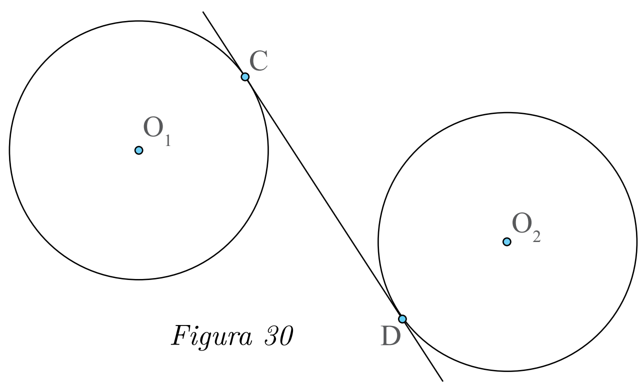


Figura 30

7. Determină ce poligon regulat are măsura unui unghi egală cu:
a) 60°; b) 90°; c) 120°; d) 144°.

8. Determină aria şi lungimea unui cerc de rază a) 8 cm; b) $3\sqrt{5}$ cm; c) $2\sqrt{7}$ cm; d) 11 cm.

9. Desenează, pe caiet, un poligon regulat cu n laturi şi determină măsura unghiurilor poligonului pentru: a) $n = 9$; b) $n = 12$; c) $n = 6$; d) $n = 10$.

10. În *Figura 31*, se observă schiţa unui teren de sport. Porţiunile $\overset{\frown}{AD}$ şi $\overset{\frown}{BC}$ reprezintă semicercuri.

a) Calculează aria suprafeței totale a terenului.

b) Sunt suficienţi 286 metri de sârmă pentru a împrejmui terenul? Justifică răspunsul dat.

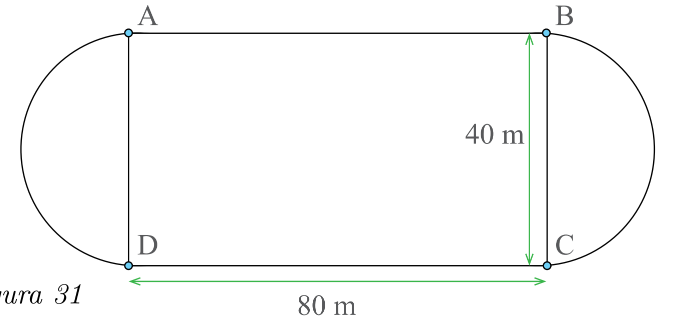


Figura 31

Proiect

Geometria cercului

• Ce veți face?

Veți căuta informații despre istoria geometriei cercului.

• De ce veți face?

Pentru a investiga cum a evoluat geometria cercului, de la grecii antici până în zilele noastre.

• Cum veți face?

Veți căuta, în cărți sau pe Internet, date, imagini, informații despre evoluția geometriei cercului.

• Cum veți ști că ați reușit?

Veți prezenta proiectul vostru, iar colegii din celelalte grupe vor face aprecieri și sugestii.

• Ce se evaluează?

- utilizarea informațiilor relevante din cărți sau de pe Internet;
- participarea tuturor membrilor grupului la căutarea informațiilor;
- forma atractivă a desenelor/imaginilor utilizate;
- prezentarea clară a proiectului.

Sugestii:

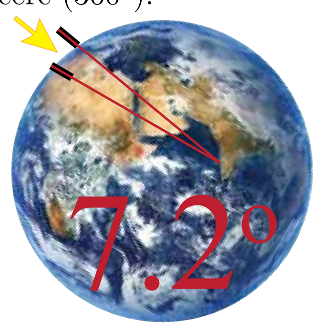
- Organizați-vă în grupuri și stabiliți-vă rolurile.
- Folosiți imagini și informații relevante pentru a prezenta o etapă importantă în evoluția geometriei cercului.

Model de prezentare

Eratostene și geometria cercului

Eratostene, matematician grec, a trăit în Egipt în jurul anului 250 î.Hr. El s-a folosit de geometria cercului pentru a dovedi că Pământul este rotund.

Eratostene a aflat că în ziua solstiţiului de vară (21 iunie) există, undeva în sudul Egiptului un puț în care lumina Soarelui pătrunde până în punctul cel mai adânc al acestuia. În momentul în care razele pătrundeau până în acel punct, Eratostene a înfipt un băţ vertical în sol în Alexandria, măsurând unghiul format de băţ şi razele Soarelui. A obţinut o valoare de 7,2°, adică fix a cincizecea parte dintr-un cerc (360°).



- Prezentați proiectul într-un mod inedit.
- Stabiliți, împreună cu profesoara/profesorul, un proiect câștigător.

Evaluare

10p din oficiu

20p **1.** Folosind *Figura 32*, asociază fiecărui număr din coloana **A** litera corespunzătoare din coloana **B**.

A	B
1. Rază	a) AE
2. Diametru	b) $\widehat{AE}$
3. Coardă în cerc care nu este diametru	c) OA
4. Arc de cerc	d) CD
	e) BA

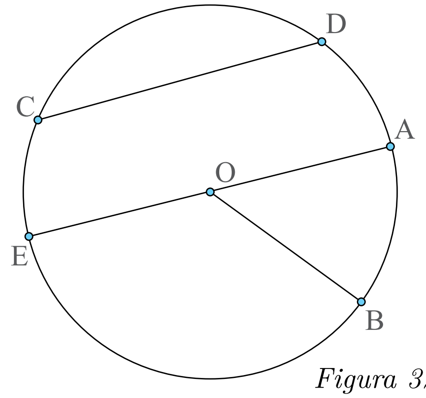


Figura 32

10p **2.** Completează cu **A**, dacă relația este adevărată, sau cu **F**, dacă este falsă:
a) Raza unui cerc cu diametrul de 10 cm măsoară 20π cm.
b) Măsura fiecărui unghi al unui poligon regulat cu 10 laturi este $144°$.

10p **3.** Completează enunțurile de mai jos:
a) Poligonul regulat care are 6 laturi se numește ... .
b) Dacă pe cercul de centru O se consideră punctele A, B şi C astfel încât AB este diametru şi $AC = BC$, atunci măsura unghiului CAB este de ...°.

10p **4.** Alege varianta corectă de răspuns:
Dacă pe cercul de centru O se consideră punctele A, B, C şi D astfel încât AB este diametru, iar punctele C şi D sunt situate pe cerc, astfel încât $AB \perp CD$ și măsura arcului $\widehat{BD} = 30°$, atunci măsura arcului $\widehat{AC}$ este egală cu:
A. $30°$; B. $150°$; C. $60°$; D. $90°$.

10p **5.** Determină câte rotaţii complete realizează o roată cu raza de 50 cm pe o distanţa de 2 km.

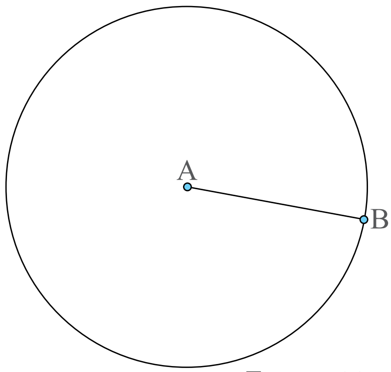


Figura 33

10p **6.** Determină lungimea segmentului AB din *Figura 33*, știind că aria discului, cu centrul în A, este egală cu 50π cm^2.

10p
10p **7.** Grădina lui Victor are forma unui dreptunghi cu lățimea de 10 m și lungimea de două ori mai mare. În grădină se află două ronduri pe care au fost plantate flori, iar suprafața rămasă este acoperită cu gazon. Cele două cercuri sunt tangente între ele și tangente la laturile dreptunghiului, ca în *Figura 34*.
a) Arată că aria suprafeței plantate cu flori este mai mică de 160 m^2. Foloseşte faptul că $3{,}14 < \pi < 3{,}15$.
b) Știind că pentru 1 m^2 de gazon se folosesc 500 g de semințe, iar 1 kg de semințe costă 59,99 lei, calculează suma necesară pentru achiziționarea semințelor. În acest caz, folosește aproximarea $\pi \cong 3{,}14$.

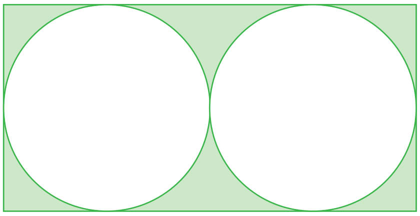


Figura 34

Exersezi și progresezi

1. Numeşte cel puţin câte un exemplu pe *Figura 35* pentru fiecare element al cercului:
- centrul cercului
- rază
- diametru
- tangentă
- unghi la centru
- unghi înscris în cerc

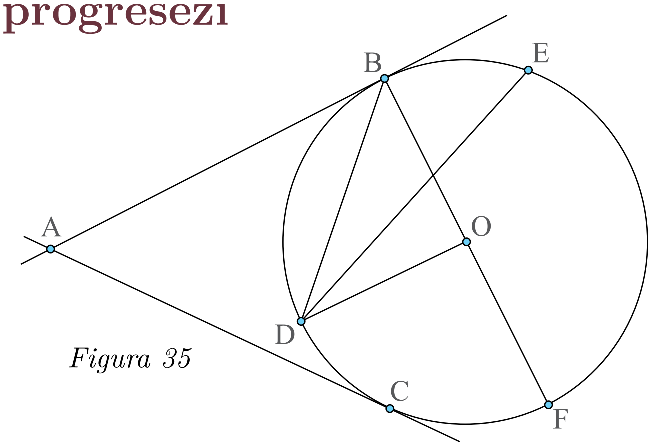


Figura 35

2. În *Figura 36* este desenat un poligon regulat.

a) Care este numele acestuia?

b) Care este măsura unui unghi al poligonului?

c) Care este măsura arcului determinat de două puncte consecutive?

d) Care dintre următoarele poligoane este regulat?

i) $A_2A_4A_6A_8A_{10}A_{12}$ ii) $A_3A_6A_9A_{12}$

iii) $A_1A_3A_6A_8A_{11}$ iv) $A_3A_7A_{11}$

Argumentează răspunsul dat.

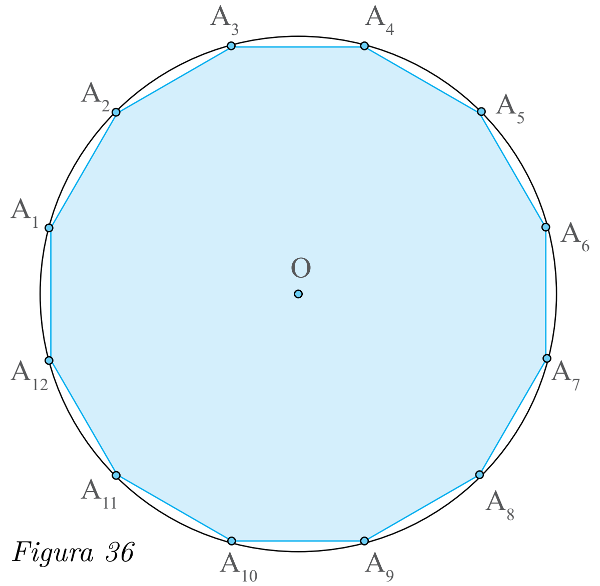


Figura 36

3. Determină măsurile unghiurilor unui poligon regulat care are numărul de laturi egal cu:

a) 18; b) 10; c) 9; d) 6.

4. Determină aria şi lungimea unui cerc cu diametrul egal cu:

a) 12 m; b) 20 cm; c) 7 dm; d) 5 m.

5. Tangentele, duse dintr-un punct T, intersectează cercul, de centru O, în punctele A, respectiv B. Determină lungimea coardei AB, știind că $OT = 20$ cm și aria patrulaterului $AOBT$ este 100 cm^2.

6. Calculează aria porțiunii de culoare roșie din *Figura 37*, știind că pătratul $ABCD$ are latura de 16 cm, iar cele patru cercuri cu centrele în vârfurile pătratului au raza egală cu jumătate din lungimea laturii AB.

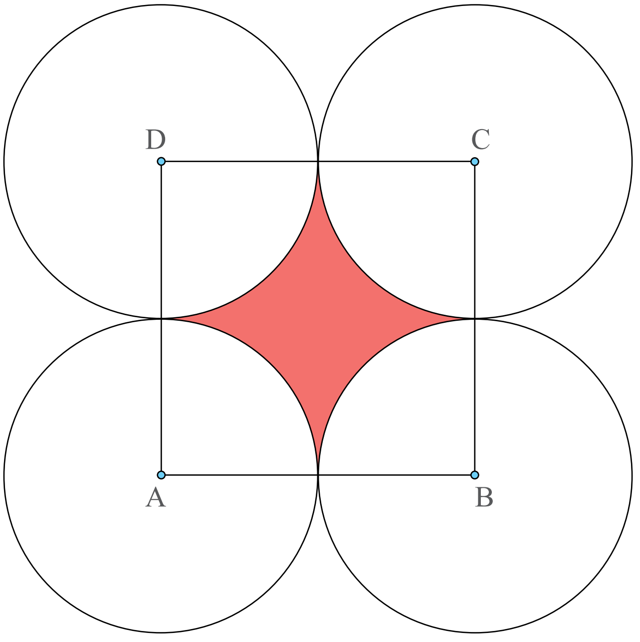


Figura 37

7. Știind că cele două pătrate mari din *Figurile 38 și 39* sunt identice, demonstrează că discul de culoare albastră are aceeași arie cu suma ariilor celor patru discuri de culoare verde.

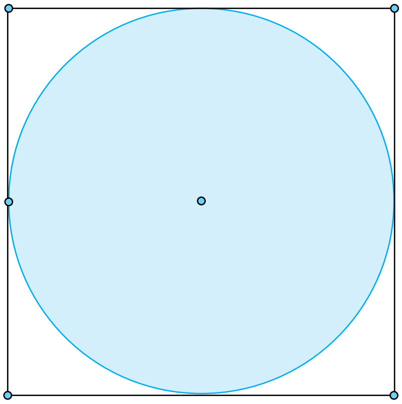


Figura 38

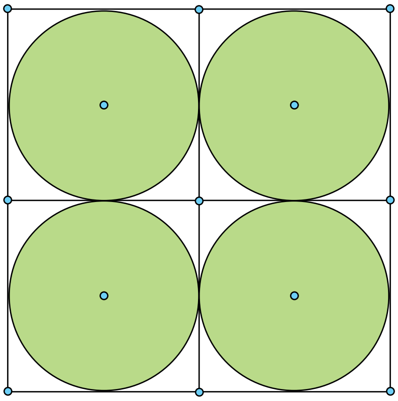


Figura 39

8. În *Figura 40*, cercurile de rază 1 cm și de centre O_1 și O_2 sunt secante, punctul E se află la intersecția celor două cercuri, punctele C și D reprezintă intersecția dintre segmentul O_1O_2 și cele două cercuri, iar punctele A și B sunt alese pe cercuri, astfel încât unghiurile $\sphericalangle AO_1O_2$ și $\sphericalangle BO_2O_1$ sunt drepte. Știind că porțiunea colorată cu portocaliu are aceeași arie precum cea a porțiunii de culoare verde, calculează lungimea segmentului O_1O_2.

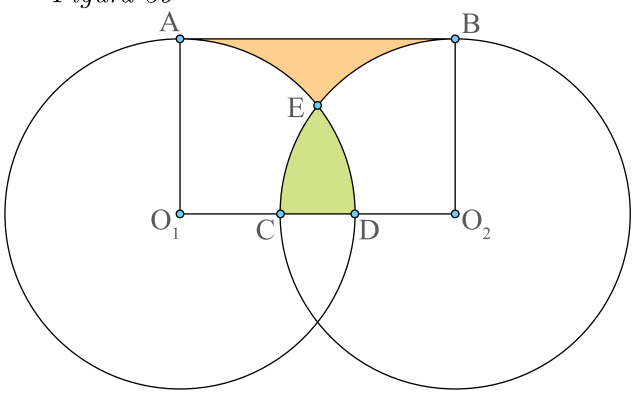


Figura 40

9. Problemă rezolvată.

Lunulele lui Hipocrate. Se consideră ABC un triunghi dreptunghic în A și punctele D, E și F mijloacele laturilor AB, AC, respectiv BC. Se consideră, apoi, cercurile C_1, de centru E și rază AE, C_2, de centru D și rază AD și C_3, de centru F și rază AF.

Demonstrează că suma ariilor colorate cu albastru în *Figura 41* este egală cu aria triunghiului dreptunghic ABC. *(Lunulele sunt tocmai suprafețele colorate cu albastru!)*

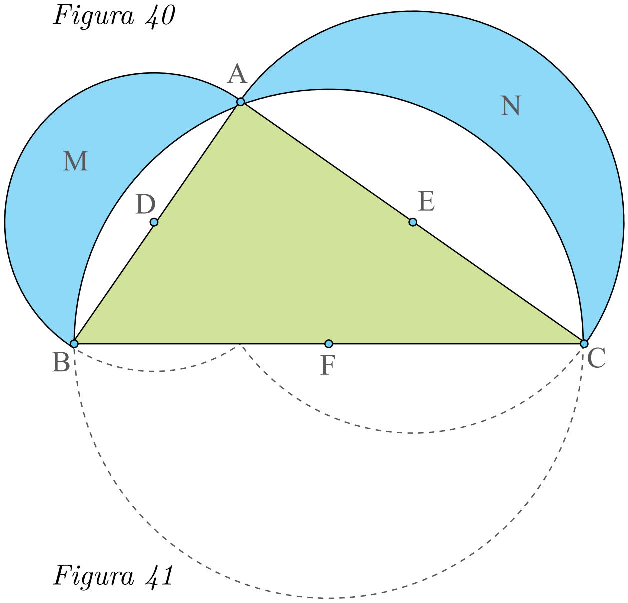


Figura 41

Rezolvare: Notăm $\mathcal{A}$ suma ariilor hașurate, $\mathcal{A}_D$ aria semicercului de diametru AB, $\mathcal{A}_E$ aria semicercului de diametru AC și $\mathcal{A}_F$ aria semicercului de diametru BC.

Avem $\mathcal{A} = \mathcal{A}_D + \mathcal{A}_E - (\mathcal{A}_{DBMA} + \mathcal{A}_{ECNA})$.

Pe de altă parte $\mathcal{A}_F = \mathcal{A}_{\triangle ABC} + \mathcal{A}_{DBMA} + \mathcal{A}_{ECNA}$, de unde $\mathcal{A}_{DBMA} + \mathcal{A}_{ECNA} = \mathcal{A}_F - \mathcal{A}_{\triangle ABC}$. Atunci $\mathcal{A} = \mathcal{A}_D + \mathcal{A}_E - (\mathcal{A}_F - \mathcal{A}_{\triangle ABC})$ sau $\mathcal{A} = \mathcal{A}_D + \mathcal{A}_E - \mathcal{A}_F + \mathcal{A}_{\triangle ABC}$.

Deoarece $\mathcal{A}_D = \dfrac{AB^2}{4}\pi$, $\mathcal{A}_E = \dfrac{AC^2}{4}\pi$, și $\mathcal{A}_F = \dfrac{BC^2}{4}\pi$, iar $AB^2 + AC^2 = BC^2$, rezultă $\mathcal{A}_D + \mathcal{A}_E = \mathcal{A}_F$ și deci $\mathcal{A} = \mathcal{A}_{\triangle ABC}$.

10. Un pendul de lungime l oscilează cu un unghi θ față de poziția de echilibru. Determină ce lungime are arcul descris de capătul pendulului, dacă:

a) $l = 6\ cm$, $\theta = 30°$;

b) $l = 3\ cm$, $\theta = 60°$;

c) $l = 4\ cm$, $\theta = 45°$.

Ce rezultate ai obținut? Ce observi?

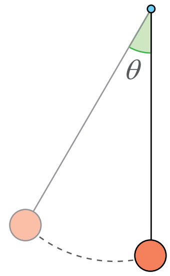


Figura 42

11. Problemă rezolvată: Se consideră trei cercuri cu centrele în punctele O_1,O_2,O_3 și razele egale cu r. Toate cele trei cercuri se intersectează în punctul M și două câte două se intersectează în punctele A, B, respectiv C. Cercul care trece prin punctele A, B, C are aceeași rază cu cercurile date. (Problema piesei de 5 lei, Problema lui Țițeica)

Rezolvare: Începem cu două observații evidente:

1. Dacă două triunghiuri sunt congruente, atunci cercurile circumscrise celor două triunghiuri au razele egale.

2. Cercul circumscris triunghiului $O_1O_2O_3$ are aceeași rază cu cercurile date, deoarece $MO_1 = MO_2 = MO_3 = r$.

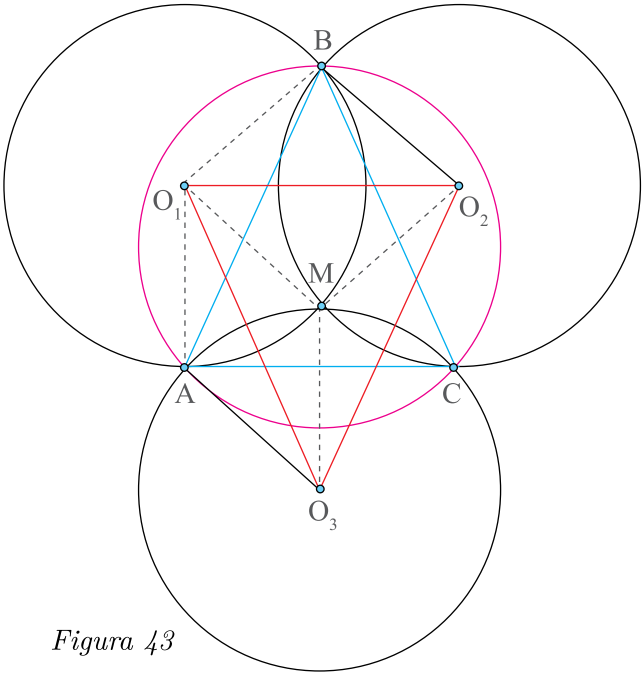


Figura 43

Vom arăta că $\triangle ABC \equiv \triangle O_2O_3O_1$.

În patrulaterul O_1MO_2B, avem $MO_1 = O_1B = BO_2 = O_2M = r$ de unde deducem că O_1MO_2B este romb și atunci $BO_2 \parallel MO_1$ (1).

În patrulaterul O_1MO_3A, avem $MO_1 = O_1A = AO_3 = O_3M = r$ de unde deducem că O_1MO_3A este romb și atunci $AO_3 \parallel MO_1$ (2).

Din (1) și (2) rezultă $AO_3 \parallel BO_2$. Dar $AO_3 = BO_2 = r$ și deci AO_3O_2B este paralelogram, de unde $AB \equiv O_3O_2$ (3).

Analog, se demonstrează că $AC \equiv O_1O_2$ (4) și $BC \equiv O_1O_3$ (5).

Din (3), (4) și (5), conform cazului LLL de congruență a triunghiurilor, rezultă că $\triangle ABC \equiv \triangle O_2O_3O_1$ și, din prima observație, deducem că cercul care trece prin punctele A, B, C are aceeași rază cu cercurile date.

Portofoliu

Prezintă portofoliul **Despre geometria cercului**.

Autoevaluare:

a) Portofoliul conține desenele/piesele recomandate?

b) Piesele/desenele respectă cerințele de realizare?

c) Aspectul portofoliului este îngrijit?